Hochschule RheinMain SS 2017
Prof. Dr. D. Lehmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Wir betrachten einen Preisprozess $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ im zeitabhängigen Black-Scholes Modell gegeben durch die SDE

$$dS_t/S_t \;=\; \mu_t\,dt \;+\; \sigma_t\,dx_t \tag{1}$$

Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 2$ Jahren und die instantane Volatilität σ_t sei gegeben durch

$$\sigma_t \;=\; \begin{cases} \sigma_1 = 70\% & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma_2 = 10\% & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Für den Drift μ_t wählen wir

$$\mu_t \;=\; \begin{cases} \mu_1 = 15\% & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \mu_2 = 1\% & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

a) Stellen Sie die Werte von σ_1, σ_2 und μ_1, μ_2 sowie $M_{\text{year}} = 250$, die Anzahl der Zeitschritte pro Jahr, auf einem Excel-sheet als Input-Parameter bereit und simulieren Sie dann einige Pfade mit der Dynamik (1). Plotten Sie die Pfade als Funktion von der Zeit.

b) Für eine Zeitreihe mit M_{year} Beobachtungsdaten pro Jahr ist die jährliche realisierte Volatilität definiert durch

$$\sigma_{\text{realized}} \;:=\; \sqrt{\frac{M_{\text{year}}}{M}\sum_{k=1}^{M}[\text{ret}(t_k)]^2} \tag{2}$$

Dabei ist M die Gesamtlänge der Zeitreihe, die Anzahl aller Beobachtungsdaten. Wenn also jedes Jahr dieselbe Anzahl M_{year} an Beobachtungsdaten hat (ist bei Simulationen immer der Fall, aber die tatsächliche Anzahl der Banking Days pro Jahr variiert immer etwas um die Zahl 250 herum) und T die Laufzeit in Jahren ist, dann ist $M = M_{\text{year}} \times T$. Die Returns $\text{ret}(t_k)$ sind gegeben durch

$$\text{ret}(t_k) \;:=\; \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}\,.$$

Laden Sie sich aus dem Internet (etwa von Yahoo Finance) die DAX-Zeitreihe sowie die Zeitreihe für die Commerzbank-Aktie herunter, für den Zeitraum 1.Januar 2007 bis 31.Dezember 2016, und berechnen Sie dann für jedes der 10 Jahre 2007, 2008, ... , 2016 die jährliche realisierte Volatilität. Berechnen Sie dann ebenfalls die jährliche realisierte Volatilität für den gesamten 10-jahres Zeitraum.

..bitte wenden

c) Wir betrachten jetzt wieder das Modell (1) mit Zeithorizont $T = 2$ Jahre. Berechnen Sie für Ihre simulierten Pfade jeweils die realisierte Volatilität für das erste Jahr, für das zweite Jahr und dann für den gesamten 2-jahres Zeitraum. Vergleichen Sie die realisierte Volatilität für den 2-jahres Zeitraum mit dem arithmetischen Mittel und dem quadratischen Mittel, gegeben durch

$$\sigma_{\text{arithmetic mean}} := \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 40\%$$
$$\sigma_{\text{quadratic mean}} := \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}} = 50\%$$

d) Berechnen Sie jetzt mit Bleistift und Papier die Grösse

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sigma^2_{\text{realized}} = \lim_{M_{\text{year}} \to \infty} \frac{M_{\text{year}}}{M} \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})} \right]^2$$

wobei S_t durch die SDE (1) gegeben sein soll.

2.Aufgabe: In der Vorlesung haben wir in dem Lemma 13.3 gezeigt, dass der Preisprozess

$$S_t = S_0 \, e^{\int_0^t \sigma_u \, dx_u + \int_0^t (\mu_u - \sigma_u^2/2) du}$$

die SDE für das zeitabhängige Black-Scholes Modell erfüllt,

$$dS_t / S_t = \mu_t \, dt + \sigma_t \, dx_t \, .$$

Überprüfen Sie diese Aussage durch eine geeignete Excel/VBA Simulation. Erweitern Sie dazu Ihre Implementation aus dem Teil (a) der ersten Aufgabe in geeigneter Art und Weise.