

6. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe (Monte Carlo Simulation, Teil2): Der $t = 0$ Preis V_0 einer Option H mit Auszahlung

$$H = H(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}) \quad (1)$$

im Black-Scholes Modell ist gegeben durch den diskontierten Erwartungswert

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_W[H(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T})] \quad (2)$$

Dabei ist der Preisprozess S_t in (2) gegeben durch den Risiko-neutralen Preisprozess, gegeben durch die SDE

$$dS_t/S_t = r dt + \sigma dx_t \quad (3)$$

und $\mathbb{E}_W[\cdot]$ ist der Erwartungswert bezüglich des Standard-Wienermaßes. Zur Monte Carlo Berechnung von (2) diskretisieren wir

$$[0, T] \approx \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t\} =: \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\} \quad (4)$$

mit $N := T/\Delta t$ so dass das Wienermaß dW und Brownsche Bewegung x_{t_k} gegeben sind durch

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j, \quad dx_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (5)$$

$$dW(\{\phi_k\}_{1 \leq k \leq N}) = \prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \quad (6)$$

und die SDE (3) gegeben ist durch

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + r \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \quad (7)$$

Wir müssen dann einen Erwartungswert von der Form (wie auf dem letzten Übungsblatt)

$$\mathbb{E}_W[F] = \int_{\mathbb{R}^N} F(\phi) p(\phi) d^N \phi \quad (8)$$

berechnen mit $d = N$,

$$p(\phi) = p(\{\phi_k\}_{1 \leq k \leq N}) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \phi_k^2} \quad (9)$$

und $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(\phi) = F(\{\phi_k\}_{1 \leq k \leq N}) := H(\{S_{t_k}\}_{0 \leq t_k \leq t_N}) \quad (10)$$

wobei die $S_{t_k} = S_{t_k}(\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq k})$ durch Iteration von (7) als Funktion der ϕ_k berechnet werden können. Die Monte Carlo Berechnung von (2) würde also folgendermaßen aussehen:

- (i) Diskretisiere das Intervall $[0, T]$ mit N Zeitschritten der Länge $\Delta t := T/N$. Eine typische Wahl wäre hier etwa $N = 250$ (= Anzahl der Handelstage pro Jahr) Zeitschritte pro Jahr.
- (ii) Wähle eine Anzahl M von Monte Carlo Simulationen (etwa $M = 10000$ oder $M = 100000$) und erzeuge $N \cdot M$ standard-normalverteilte Zufallszahlen

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{für Pfad 1 :} & \phi_1^{(1)} & \phi_2^{(1)} & \cdots & \phi_N^{(1)} \\
 & & \vdots & & \\
 \text{für Pfad } i \text{ :} & \phi_1^{(i)} & \phi_2^{(i)} & \cdots & \phi_N^{(i)} \\
 & & \vdots & & \\
 \text{für Pfad } M \text{ :} & \phi_1^{(M)} & \phi_2^{(M)} & \cdots & \phi_N^{(M)}
 \end{array} \tag{11}$$

- (iii) Setze $S_{t_0}^{(i)} := S_0 =$ aktueller Wert des Basiswertes S und berechne den i -ten Pfad

$$\text{Pfad}_i := \left\{ S_{t_k}^{(i)} \left(\{\phi_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq k} \right) \right\}_{1 \leq k \leq N} \tag{12}$$

durch Iteration von (7).

- (iv) Die Monte Carlo Approximation für den Preis V_0 aus (2) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
 V_0 &\approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M H \left(\{S_{t_k}^{(i)}\}_{1 \leq k \leq N} \right) \\
 &= e^{-rT} \frac{1}{\text{Anzahl Pfade}} \sum_{\text{Pfade}} H(\text{Pfad}) .
 \end{aligned} \tag{13}$$

Erstellen Sie jetzt ein Excel-sheet, auf dem Sie den Monte Carlo Preis einer Standard Call- und Put-Option mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation berechnen können. Überprüfen Sie Ihren Monte Carlo Preis mit Hilfe der analytischen Black-Scholes Formeln.

2.Aufgabe: Erstellen Sie ein Excel-sheet, auf dem Sie den Monte Carlo Preis einer Down-and-Out Barrier Call-Option im Black-Scholes Modell mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation berechnen können. Überprüfen Sie Ihren Monte Carlo Preis mit Hilfe der analytischen Formel aus Theorem 11.1.