Hochschule RheinMain SS 2017
Prof. Dr. D. Lehmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe (Monte Carlo Simulation): Es sei

$$p \;:\; \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

eine ein- oder mehrdimensionale ($d = 1$ oder $d > 1$) Wahrscheinlichkeitsdichte, also $p \geq 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(\phi)\, d^d\phi = 1 \;.$$

Weiter sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion, von der wir mit Hilfe der Monte Carlo Methode den Erwartungswert bezüglich p berechnen wollen[1]:

$$\mathsf{E}[F] \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} F(\phi)\, p(\phi)\, d^d\phi$$

Dazu erzeugt man N (dieses N heisst dann auch die Anzahl der Monte Carlo Simulationen) p-verteilte, unabhängige Zufallszahlen

$$(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N) \;\in\; (\mathbb{R}^d)^N \;=\; \mathbb{R}^{dN}$$

und bildet die Monte Carlo Summe (beachten Sie, dass nur das F in der Monte Carlo Summe auftaucht, das p steckt schon in den Zufallszahlen drin)

$$S_N(F) \;:=\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\phi_i)$$

etwa mit $N = 10000$ oder $N = 100000$. Grundlage der Monte Carlo Berechnung ist folgende approximative Identität, die eine unmittelbare Folge des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie ist:

$$\mathsf{P}\Big(\,\big|\, S_N(F) - \mathsf{E}[F] \,\big| \,\geq\, \alpha\sqrt{\tfrac{\mathsf{V}[F]}{N}} \,\Big) \;\approx\; 2\int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 2\,\Phi(-\alpha)$$

Das heisst, mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% ist

$$S_N(F) - 2.58\sqrt{\tfrac{\mathsf{V}[F]}{N}} \;\leq\; \mathsf{E}[F] \;\leq\; S_N(F) + 2.58\sqrt{\tfrac{\mathsf{V}[F]}{N}}$$

[1] ist p eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, so ist das Integral durch eine entsprechende Summe zu ersetzen

und mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.99% ist

$$S_N(F) - 3.89\sqrt{\tfrac{\mathsf{V}[F]}{N}} \;\leq\; \mathsf{E}[F] \;\leq\; S_N(F) + 3.89\sqrt{\tfrac{\mathsf{V}[F]}{N}}$$

Dabei sind

$$-2.58 \;=\; \Phi^{-1}\bigl(\tfrac{1\%}{2}\bigr) \quad \text{und} \quad -3.89 \;=\; \Phi^{-1}\bigl(\tfrac{0.01\%}{2}\bigr)$$

und die Varianz $\mathsf{V}[F]$ ist gegeben durch

$$\mathsf{V}[F] \;=\; \mathsf{E}[F^2] - \mathsf{E}[F]^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} F(\phi)^2 p(\phi)\, d^d\phi \;-\; \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} F(\phi)\, p(\phi)\, d^d\phi\Bigr)^2 .$$

In dieser Aufgabe wollen wir die Monte Carlo Approximationsformel

$$\mathsf{E}[F] \;\approx\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\phi_i) \tag{1}$$

sowie die Abschätzung für den Fehler

$$\Bigl|\, \mathsf{E}[F] \;-\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\phi_i) \,\Bigr| \;\leq\; \frac{\mathrm{const}_d}{\sqrt{N}} \tag{2}$$

durch explizite Simulation in Excel/VBA an 2 Beispielen, ein eindimensionales ($d = 1$) und ein mehrdimensionales ($d = 3$), verdeutlichen:

a) Überprüfen Sie, für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$, die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie normalverteilte Zufallszahlen verwenden. Was also genau ist F und was ist p? Plotten Sie die Monte Carlo Summe, die rechte Seite von (1), für

$$N \;\in\; \{1000, 2000, 3000, \cdots, 48000, 49000, 50000\} \tag{3}$$

Tragen Sie in diesen Plot ebenfalls das exakte Resultat als rote, horizontale Linie ein. Berechnen und plotten Sie dann, vielleicht nur für $\lambda = 2$, den Fehlerterm

$$\text{mc\_error} \;=\; \mathsf{E}[F] \;-\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\phi_i) \tag{4}$$

für die Werte von N aus (3). Plotten Sie ebenfalls die Grössen $\sqrt{N} \times \text{mc\_error}$ und $N \times \text{mc\_error}$ als Funktion von N.

b) Überprüfen Sie die Formel

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \chi(0 \leq x + y + z \leq 1)\, dx\, dy\, dz \;=\; \frac{1}{3!}$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie auf dem Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallszahlen verwenden. Was also genau ist F und was ist p? Plotten Sie die Monte Carlo Summe, die rechte Seite von (1), für die Werte von N aus (3). Tragen Sie in diesen Plot ebenfalls das exakte Resultat als rote, horizontale Linie ein. Berechnen und plotten Sie dann den Fehlerterm mc_error aus (4) für die Werte von N aus (3). Plotten Sie ebenfalls die Grössen $\sqrt{N} \times$ mc_error und $N \times$ mc_error als Funktion von N.

2.Aufgabe: Gegeben sei das Integral

$$I \;:=\; \int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx$$

a) Geben Sie den Wert von I mit Hilfe der $\Phi(x)$ oder $N(x)$-Funktion an,

$$\Phi(x) \;=\; N(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

b) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in Excel/VBA, indem Sie normalverteilte Zufallszahlen verwenden. Was ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

c) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in Excel/VBA, indem Sie uniforme oder gleichverteilte Zufallszahlen benutzen. Was ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?