Hochschule RheinMain SS 2017
Prof. Dr. D. Lehmann

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $a > 0$ sei eine positive reelle Zahl. Für den Level a definieren wir eine Stopzeit τ_a, auch 'first hitting time' genannt, durch

$$\tau_a(\{x_t\}_{t\geq 0}) \;:=\; \inf\{\, t \geq 0 \mid x_t = a \,\}$$

Beweisen Sie:

$$\mathsf{P}\big[\, \tau_a \in (t, t+dt) \,\big] \;=\; \tfrac{a}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}\, dt \tag{1}$$

Dazu dürfen Sie das Resultat (10.21) aus dem Theorem 10.5 aus dem Skript benutzen. Das war folgende Aussage:

$$\mathsf{P}\big[\max_{s\in[0,t]} x_s \geq a\big] \;=\; 2\,\mathsf{P}\big[\, x_t \geq a \,\big]\,.$$

Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie die Menge $\{\, \tau_a \in (t, t+dt) \,\}$ durch Mengen der Form $\{\, \max_{s\in[\,0,\tilde{t}\,]} x_s \;\geq\; a \,\}$ ausdrücken können, für geeignete $\tilde{t}$. Überlegen Sie sich dann, durch welchen analytischen Ausdruck die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}\big[\, x_t \geq a \,\big]$ gegeben ist. Damit können Sie dann die Formel (1) beweisen.

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}[\, x_t \leq a \,]$ für $a \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}[\, x_t \leq \sigma\sqrt{t} \,]$ für $\sigma \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}[\, x_t \leq ct \,]$ für $c \in \mathbb{R}$.

d) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\big[\max\limits_{s\in[0,t]} x_s \leq a\big]$ für $a > 0$.

e) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\big[\max\limits_{s\in[0,t]} x_s \leq \sigma\sqrt{t}\big]$ für $\sigma > 0$.

f) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\big[\max\limits_{s\in[0,t]} x_s \leq ct\big]$ für $c > 0$.

..bitte wenden

3.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $\mathsf{P}\big[\, x_T \leq 1 \,\wedge\, \max\limits_{t\in[0,T]} x_t \leq 2 \,\big]$ für $T = 1$.

b) $\mathsf{P}\big[\, x_T \leq 1 \,\wedge\, \max\limits_{t\in[0,T]} x_t \leq 2 \,\big]$ für $T = 100$.

c) $\mathsf{P}\big[\, x_T \geq -3 \,\wedge\, \min\limits_{t\in[0,T]} x_t \geq -6 \,\big]$ für $T = 9$.