

2. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe: Es sei $S_t = S_t^{(\mu)}$ ein ‘real world’ Preis-Prozess im Black-Scholes Modell gegeben durch die stochastische Differentialgleichung (SDE, stochastic differential equation)

$$dS_t^{(\mu)} / S_t^{(\mu)} = \mu dt + \sigma dx_t \quad (1)$$

und $S_t^{(r)}$ sei der risikoneutrale Preis-Prozess, gegeben durch die SDE

$$dS_t^{(r)} / S_t^{(r)} = r dt + \sigma dx_t \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) werden gelöst durch

$$\begin{aligned} S_t^{(\mu)} &= S_0^{(\mu)} e^{\sigma x_t + (\mu - \sigma^2/2)t} \\ S_t^{(r)} &= S_0^{(r)} e^{\sigma x_t + (r - \sigma^2/2)t} \end{aligned}$$

wobei $S_0^{(\mu)} = S_0^{(r)} = S_0$ durch den aktuellen, jetzt bekannten Preis des Basiswertes gegeben ist. Es sei $dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$ das Standard-Wiener-Maß und $d\tilde{W}(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$ das risikoneutrale Pricing-Maß, gegeben durch

$$d\tilde{W}(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{T/\Delta t} \{ \tilde{p}(x_{t_{k-1}}, x_{t_k}) dx_{t_k} \}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und

$$\tilde{p}_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(x - y - \frac{\mu - r}{\sigma}t)^2}.$$

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass

$$\mathbb{E}_{\tilde{W}}[H(S_{t_1}^{(\mu)}, \dots, S_{t_m}^{(\mu)})] = \mathbb{E}_W[H(S_{t_1}^{(r)}, \dots, S_{t_m}^{(r)})] \quad (3)$$

gilt für eine beliebige Funktion $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. In dieser Aufgabe wollen wir die Formel (3) verifizieren, indem wir die linke und die rechte Seite von (3) explizit berechnen für die folgenden Fälle (a) und (b):

a) $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < t < T$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$H(S_t) = S_t^\alpha$$

b) $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < t_1 < t_2 < T$ und

$$H(S_{t_1}, S_{t_2}) = \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}$$