Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2017

13. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II
(Probe-Klausur)

Theorie-Teil:

1.Aufgabe (8 Punkte): Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1.0	2.0	4.0
implizite Volatilität:	28%	22%	18%	20%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \to \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.

2.Aufgabe (8 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $\mathsf{P}\big[\max_{t\in[0,T]} x_t \leq 2\big]$ für $T = 4$.

b) $\mathsf{P}\big[x_T \leq 1 \wedge \max_{t\in[0,T]} x_t \leq 2\big]$ für $T = 4$.

c) $\mathsf{P}\big[x_T \leq 1 \wedge \max_{t\in[0,T]} x_t \geq 2\big]$ für $T = 4$.

3.Aufgabe (8 Punkte): Die Preisdynamik eines Underlyings $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das zeitunabhängige Black-Scholes Modell $dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$ mit $\sigma = 30\%$ und $\mu = 5\%$. Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$. Betrachten Sie den Down-and-Out Barrier Call mit payoff

$$H_{\text{Down,Out}}(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}) \;=\; \max\{S_T - K, 0\} \times \chi\big(\min_{t\in[0,T]} S_t > B\big)$$

mit Laufzeit $T = 5$ Jahren und Parametern $K = 80$ und $B = 60$. Berechnen Sie den $t = 0$ Preis V_0 dieser Option.

4.Aufgabe (8 Punkte): Berechnen Sie den folgenden Erwartungswert bezüglich des Standard-Wienermaßes:

$$E_W\left[\, e^{-\int_0^4 \sigma_t\, dx_t} \,\right]$$

mit

$$\sigma_t \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

5.Aufgabe (8 Punkte): Es seien ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und ϕ_4 unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Konstruieren Sie aus diesen unabhängigen Zufallszahlen korrelierte, standard-normalverteilte Zufallszahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 mit folgenden Korrelationen:

$$\begin{aligned} \mathsf{Corr}[\xi_1, \xi_2] &= 80\% \\ \mathsf{Corr}[\xi_3, \xi_4] &= 60\% \end{aligned}$$

und $\mathsf{Corr}[\xi_i, \xi_j] \;=\; 0$ für alle übrigen Korrelations-Paare $(i,j) \neq (1,2), (3,4)$.

Programmier-Teil:

6.Aufgabe (8 Punkte): Berechnen Sie das Integral

$$I \;:=\; \int_0^1 \int_0^1 \frac{4xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

numerisch mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in VBA. Wählen Sie dazu mindestens 10000 Zufallszahlen.

7.Aufgabe (12 Punkte): Wir betrachten $m = 2$ Underlyings, deren Risiko-neutrale Preisdynamik durch das zeitunabhängige Multi-Underlying Black-Scholes Modell gegeben ist:

$$\begin{aligned} dS_{1,t}/S_{1,t} &= r\, dt \;+\; \sigma_1\, dx_{1,t} \\ dS_{2,t}/S_{2,t} &= r\, dt \;+\; \sigma_2\, dx_{2,t} \end{aligned}$$

mit korrelierten Brownschen Bewegungen

$$dx_{1,t}\, dx_{1,t} \;=\; \rho\, dt$$

Man kann zeigen, dass der Preis des relativen Outperformance-Calls H mit payoff

$$H(S_{1,T}, S_{2,T}) \;:=\; \max\left\{ \frac{S_{1,T}}{S_{2,T}} \;-\; K \,,\, 0 \right\}$$

durch die Formel

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\big[F\,N(d_2) \;-\; K\,N(d_1)\big] \tag{1}$$

gegeben ist mit

$$F \;=\; \frac{S_{1,0}}{S_{2,0}}\, e^{(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)T}$$

und

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\big[\frac{F}{K}\big]+\frac{\hat\sigma^2}{2}T}{\hat\sigma\sqrt{T}}\,, \\ d_2 &= d_1-\hat\sigma\sqrt{T}\,, \\ \hat\sigma &:= \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\,. \end{aligned}$$

Wählen Sie folgende Parameter-Werte (die Sie in VBA hard-coden können, Sie müssen sie nicht vom Excel-sheet einlesen):

$$\begin{aligned} S_{1,0} = S_{2,0} &= 100 \\ K &= 1 \\ T &= 4 \\ \sigma_1 &= 20\% \\ \sigma_2 &= 30\% \\ \rho &= -60\% \\ r &= 5\% \end{aligned}$$

a) Implementieren Sie den analytischen Ausdruck auf der rechten Seite von Formel (1) und schreiben Sie diesen analytischen Preis in die Zelle B2.

b) Wenn Sie dann noch Zeit haben *(..in der Klausur würde es vielleicht nur den Teil a oder den Teil b geben..)*, berechnen Sie den Preis V_0 für dieselben Parameter-Werte mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation. Wählen Sie etwa 5000 Monte Carlo Pfade und 250 Zeitschritte pro Jahr. Schreiben Sie dann diesen Monte Carlo Preis in die Zelle B3.