Hochschule RheinMain SS 2017
Prof. Dr. D. Lehmann

12. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Wir betrachten m Underlyings, deren Risiko-neutrale Preisdynamik durch das zeitunabhängige Multi-Underlying Black-Scholes Modell gegeben ist. Also für $1 \leq i \leq m$

$$dS_{i,t}/S_{i,t} \;=\; r\,dt \,+\, \sigma_i\,dx_{i,t}$$

mit korrelierten Brownschen Bewegungen

$$dx_{i,t}\,dx_{j,t} \;=\; \rho_{ij}\,dt$$

Typische multi-asset Optionen sind Calls oder Puts auf einen gleichgewichteten Basket. Während der Basket typischerweise als arithmetischer Durchschnitt $1/m\sum_{i=1}^m S_{i,T}/S_{i,0}$ der m Underlyings definiert wird, für dieses Produkt existiert keine analytische Preisformel, betrachten wir in dieser Aufgabe einen 'geometrischen Durchschnitt',

$$B(t) \;:=\; \left\{\prod_{i=1}^m \frac{S_{i,t}}{S_{i,0}}\right\}^{\frac{1}{m}} \tag{1}$$

und eine Optionsauszahlung von der Form

$$H \;=\; H(S_{1,T},\cdots,S_{m,T}) \;=\; H_{\text{call/put}}\big(\,B(T)\,\big)\,. \tag{2}$$

Für solche Produkte gibt es analytische Preisformeln, die wir in dieser Aufgabe herleiten wollen.

a) Zeigen Sie: $B(T)$ hat die Darstellung

$$B(T) \;=\; \exp\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \sigma_i\,x_{i,t} \,+\, \big(r - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{2}\,\big)T\right\}$$

b) Verwenden Sie jetzt den Teil (b) von Theorem 14.6 aus dem Skript, um folgende Integraldarstellung für den Preis V_0 der Option (2) herzuleiten:

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\int_{\mathbb{R}^m} H_{\text{call/put}}\left(\exp\left\{\langle\vec v,\vec y\rangle \,+\, \big(r-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\frac{\sigma_i^2}{2}\,\big)T\right\}\right)\, e^{-\frac{1}{2}\langle\vec y,\vec y\rangle}\,\frac{d^m y}{\sqrt{(2\pi)^m}}$$

Dabei ist der Vektor $\vec v \in \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$\vec v \;:=\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \sigma_i\,\sqrt{T}\times\vec a_i$$

und die Vektoren $\vec a_1,...,\vec a_n$ erfüllen $\vec a_i\cdot\vec a_j = \rho_{ij}$.

c) Zeigen Sie:

$$\|\vec{v}\|^2 \;=\; \frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m} \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\,T \;=:\; \sigma_B^2 \times T$$

wobei wir die Basket-Volatilität

$$\sigma_B \;:=\; \left\{\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m} \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\right\}^{1/2}$$

definiert haben.

d) Beweisen Sie die folgende Identität: Ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion von einer Variablen, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} F(\langle\vec{v},\vec{y}\rangle)\, e^{-\frac{1}{2}\langle\vec{y},\vec{y}\rangle} \frac{d^m y}{\sqrt{(2\pi)^m}} \;&=\; \int_{\mathbb{R}} F(x)\, e^{-\frac{x^2}{2\|\vec{v}\|^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\|\vec{v}\|} \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} F\big(\,\|\vec{v}\|x\,\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Schauen Sie sich dazu nochmal den Beweis von Theorem 13.5, Teil (a) an, insbesondere die Umformungen in Gleichung (13.44).

e) Mit Hilfe von (b),(c) und (d) erhalten wir also die folgende eindimensionale Integraldarstellung für den Preis einer Option auf einen geometrischen Basket:

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H_{\text{call/put}}\left(\exp\left\{\sigma_B\sqrt{T}\,x \,+\, bT\right\}\right)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

mit einem Drift Parameter

$$b \;:=\; r \;-\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_i^2}{2}$$

f) Schauen Sie sich jetzt noch einmal den Beweis des Theorems 6.1 aus dem Skript an, das sind die Black-Scholes Formeln für Call- und Put-Optionen, und zeigen Sie dann in völlig analoger Weise: Ist $H_{\text{call}}(B(T))$ gegeben durch

$$H_{\text{call}}(B(T)) \;=\; \max\{\,B(T) - K\;,\;0\,\}$$

dann gilt (beachten Sie, dass $B(0) = 1$ ist)

$$V_{0,\text{call}} \;=\; e^{\frac{1}{2}\left[\sigma_B^2 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\right]T} \times N(d_2) \;-\; K\,e^{-rT} \times N(d_1) \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 \;&:=\; \frac{\log[1/K] + bT}{\sigma_B\sqrt{T}} \\ d_2 \;&:=\; d_1 \,+\, \sigma_B\sqrt{T}\,. \end{aligned}$$

Geben Sie ebenfalls den Preis $V_{0,\text{put}}$ für eine Put-Option an.

g) Betrachten Sie jetzt den Fall

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma \quad \forall 1 \leq i \leq m \\ \rho_{ij} &= \rho \quad \forall 1 \leq i, j \leq m \,, \quad i \neq j \,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Basket-Volatilität ist gegeben durch

$$\sigma_B \;=\; \sigma \times \sqrt{\rho + \tfrac{1-\rho}{m}}$$

und für den Preis $V_{0,\mathrm{call}}$ erhalten wir

$$V_{0,\mathrm{call}} \;=\; e^{\frac{1}{2}(\sigma_B^2 - \sigma^2)T} \times N(d_2) \;-\; K\, e^{-rT} \times N(d_1) \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log[1/K] + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma_B \sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 + \sigma_B \sqrt{T} \,. \end{aligned}$$

2.Aufgabe: Überprüfen Sie die Formel (4) aus dem Teil (g) der Aufgabe 2, die Formel für den Preis eines ‘geometrischen Basket-Calls’ für den Spezialfall konstanter Volatilitäten und Korrelationen, mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation. Wählen Sie dazu etwa $m = 3$ Underlyings.

3.Aufgabe: Um die Thematik abzurunden, betrachten wir noch folgende Punkte:

a) Zeigen Sie: Der geometrische Basket $B(t)$ aus (1) erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dB(t)}{B(t)} \;=\; \mathrm{drift}\, dt \;+\; \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \, dx_{i,t} \tag{5}$$

mit einem Drift-Term gegeben durch

$$\mathrm{drift} \;=\; r \;+\; \frac{1}{2} \left\{ \sigma_B^2 \;-\; \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 \right\}$$

Benutzen Sie dazu die mehrdimensionale Ito-Formel: Ist $F = F(S_{1,t}, ..., S_{m,t})$, dann gilt

$$dF \;=\; \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial S_{i,t}} dS_{i,t} \;+\; \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial S_{i,t} \partial S_{j,t}} dS_{i,t} dS_{j,t} \,.$$

b) Folgern Sie aus der Darstellung (5): Es gilt

$$\left(\frac{dB(t)}{B(t)}\right)^2 \quad = \quad \sigma_B^2 \, dt$$

und (5) lässt sich auch schreiben in der Form

$$\frac{dB(t)}{B(t)} \quad = \quad \text{drift} \, dt \; + \; \sigma_B \, dz_t \tag{6}$$

wobei

$$dz_t \quad := \quad \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i \, dx_{i,t}}{\left\{\sum_{i,j=1}^m \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\right\}^{1/2}}$$

eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist.