Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2017

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Simulieren Sie 2 Preispfade, die durch das zeitlich konstante Multi-Underlying Black-Scholes Modell gegeben sind. Das heisst, die Preisdynamik ist gegeben durch

$$\begin{aligned} dS_{1,t}/S_{1,t} &= \mu_1\, dt + \sigma_1\, dx_{1,t} \\ dS_{2,t}/S_{2,t} &= \mu_2\, dt + \sigma_2\, dx_{2,t} \end{aligned}$$

mit korrelierten Brownschen Bewegungen

$$dx_{1,t}\, dx_{2,t} = \rho_{12}\, dt$$

und zeitlich konstanten Volatilitäten σ_1, σ_2 und einer konstanten Korrelation ρ_{12}. Stellen Sie dazu die Variablen T, die Anzahl der Zeitschritte pro Jahr N_{year} und die Black-Scholes Parameter μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 und die Korrelation ρ_{12} auf einem Excel-sheet als Input-Variablen bereit und wählen Sie etwa $S_{1,0} = S_{2,0} = 100$. Plotten Sie die beiden Pfade in einem Diagramm als Funktion von der Zeit und schauen Sie sich die Abhängigkeit von dem Korrelations-Parameter an.

2.Aufgabe: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrische und positiv definite Matrizen und für $a, b \in \mathbb{R}^m$ bezeichne $\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^m a_j b_j$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$. Beweisen Sie:

a) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^m$ gilt die Gleichung

$$\langle Aa, (A+B)^{-1}Bb\rangle = \langle Ab, (A+B)^{-1}Ba\rangle .$$

b) Wir definieren den Vektor

$$c := (A+B)^{-1}(Aa+Bb)$$

und die Matrix

$$C := A(A+B)^{-1}B$$

Dann gilt

$$C = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

und für beliebiges $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\langle x-a, A(x-a)\rangle + \langle x-b, B(x-b)\rangle = \langle x-c, (A+B)(x-c)\rangle + \langle a-b, C(a-b)\rangle$$

c) Zeigen Sie die folgende Identität, indem Sie die Matrix A diagonalisieren und eine geeignete Variablen-Substitution machen:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det A}} \, e^{-\frac{1}{2}\langle x, A^{-1}x\rangle} \, d^m x \;=\; 1 \, .$$

d) Beweisen Sie schliesslich das Lemma 14.8 aus der Vorlesung (hier in etwas anderer Notation):

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det A}} \, e^{-\frac{1}{2}\langle a-x, A^{-1}(a-x)\rangle} \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det B}} \, e^{-\frac{1}{2}\langle x-b, B^{-1}(x-b)\rangle} \, d^m x \;=\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det[A+B]}} \, e^{-\frac{1}{2}\langle a-b, [A+B]^{-1}(a-b)\rangle} \, .$$

Verwenden Sie dazu die Identität aus Teil (b) für $A \to A^{-1}$ und $B \to B^{-1}$ und reduzieren Sie dann das Integral auf den Aufgabenteil (c).