Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2017

10. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Es seien $\phi_1, \cdots, \phi_n$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsvariablen. Insbesondere gelte also

$$\mathsf{E}[\,\phi_i\,] \;=\; 0\,, \qquad \mathsf{E}[\,\phi_i^2\,] \;=\; 1$$

und

$$\mathsf{E}[\,\phi_i\phi_j\,] \;=\; 0 \qquad \text{für } i \neq j\;.$$

Weiter seien $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Zufallsvariablen ψ und ξ durch

$$\begin{aligned} \psi \;&:=\; \sum_{i=1}^n a_i\phi_i \;=\; \vec{a}\cdot\vec{\phi} \\ \xi \;&:=\; \sum_{i=1}^n b_i\phi_i \;=\; \vec{b}\cdot\vec{\phi} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die folgenden Grössen:

a) Die Erwartungswerte $\mathsf{E}[\,\psi\,]$ und $\mathsf{E}[\,\xi\,]$

b) Die Varianzen $\mathsf{V}[\,\psi\,]$ und $\mathsf{V}[\,\xi\,]$

c) Die Covarianz $\mathsf{Cov}[\,\psi\,,\,\xi\,]$

d) Die Korrelation $\mathsf{Corr}[\,\psi\,,\,\xi\,]$

Die Zufallsvariablen ψ und ξ sind wieder normalverteilt (nicht notwendig standard-normalverteilt, also nicht notwendig mit Varianz 1). Wenn Sie das jetzt beweisen sollten, welche mathematische Aussage genau müssten Sie dann zeigen?

2.Aufgabe: Zu einer gegebenen symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix lässt sich immer eine Cholesky-Wurzel finden, die untere Dreiecksform hat. Wir wollen uns das hier am Beispiel einer 3×3 Korrelationsmatrix klarmachen. Es sei also

$$\rho \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

..bitte wenden

und wir möchten ein $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ finden mit $AA^T = \rho$ und A hat untere Dreiecksform. Machen Sie dazu den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie dann nacheinander $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ und a_{33}.