

## 1. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

**1. Aufgabe:** Es sei  $\{x_t\}_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung mit  $x_0 = 0$  und  $dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$  sei das Wiener-Maß. Weiter sei  $\sigma \in \mathbb{R}$  ein reeller Parameter. Berechnen Sie den Erwartungswert ( $0 < t < T$ )

$$\mathbb{E}[e^{\sigma x_t}] = \int e^{\sigma x_t} dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}).$$

**2. Aufgabe:** Gegeben sei eine Digital-Option mit Laufzeit  $T > 0$  und Auszahlung

$$H(S_T) = \begin{cases} 100 & \text{falls } S_T \geq K \\ 0 & \text{falls } S_T < K \end{cases}$$

wobei der 'Strike'  $K$  eine positive Konstante ist. Die Preisdynamik von  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  sei gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t. \quad (1)$$

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind,  $r = 0$ .

- Berechnen Sie den Preis  $V_t$  dieser Option zur Zeit  $0 \leq t < T$  im Black-Scholes Modell. Hinweis: Im Ergebnis sollte die Funktion  $N(d) = \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$  vorkommen, aber keine weiteren Integrale. Berechnen Sie dann den Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow T} V_t$ .
- Zeigen Sie, dass der Preis aus Teil (a), aufgefasst als Funktion der 2 Variablen  $S_t$  und  $t$ ,  $V_t = V(S_t, t)$ , die Black-Scholes PDE mit Zinsen  $r = 0$  erfüllt.
- Berechnen Sie die replizierende Strategie für diese Option, d.h., berechnen Sie das  $\delta = \delta(S_t, t)$  für diese Option.
- Zeigen Sie, dass sich mit den  $\delta_t$ 's aus (c) und dem  $t = 0$  Preis  $V_0$  aus (a) tatsächlich die Options-Auszahlung replizieren lässt. Das heisst, zeigen Sie, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$V_0 + \int_0^T \delta(S_t, t) dS_t = H(S_T)$$

für jeden Black-Scholes Pfad  $\{S_t\}_{t \geq 0}$ , der durch die Black-Scholes SDE (1) (mit beliebigem Drift  $\mu$ ) gegeben ist. Wenden Sie dazu die Ito-Formel auf die Funktion  $V_t = V(S_t, t)$  aus Teil (a) an.

..bitte wenden

- e) Die Volatilität sei  $\sigma = 20\%$  und der Strike sei  $K = 100$ . Skizzieren Sie den Preis und das delta zur Zeit  $t = 0$  als Funktion von  $S_0 \in (0, 200)$  für die Laufzeiten  $T = 1$  und  $T = 0,1$ . Erstellen Sie dazu geeignete Diagramme in Excel.