Lösungen 2. Übungsblatt Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Wir berechnen zunächst die rechte Seite,

$$\mathsf{E}_W\big[\, H(S_{t_1}^{(r)}, ..., S_{t_m}^{(r)})\, \big]\ .$$

a) Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_W\big[(S_t^{(r)})^\alpha\big] &= \int S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t+\alpha(r-\sigma^2/2)t} dW(\{x_t\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t+\alpha(r-\sigma^2/2)t}\, e^{-\frac{x_t^2}{2t}}\, \frac{dx_t}{\sqrt{2\pi t}} \\
&= S_0^\alpha e^{\alpha(r-\sigma^2/2)t} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha\sigma\sqrt{t}y}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_0^\alpha e^{\alpha(r-\sigma^2/2)t} e^{\frac{(\alpha\sigma\sqrt{t})^2}{2}} \\
&= S_0^\alpha e^{\alpha r t} e^{(\alpha^2-\alpha)\sigma^2 t/2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\tilde W}\big[(S_t^{(\mu)})^\alpha\big] &= \int S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t+\alpha(\mu-\sigma^2/2)t} d\tilde W(\{x_t\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t+\alpha(\mu-\sigma^2/2)t}\, e^{-\frac{[0-x_t-\frac{\mu-r}{\sigma}t]^2}{2t}}\, \frac{dx_t}{\sqrt{2\pi t}} \\
&\overset{y=x_t+\frac{\mu-r}{\sigma}t}{=} \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma[y-\frac{\mu-r}{\sigma}t]+\alpha(\mu-\sigma^2/2)t}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma y} e^{-\alpha(\mu-r)t+\alpha(\mu-\sigma^2/2)t}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma y} e^{\alpha(r-\sigma^2/2)t}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}
\end{aligned}$$

und das ist identisch mit der zweiten Zeile von (1).

b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_W\big[S_{t_2}^{(r)}/S_{t_1}^{(r)}\big] &= \int \big[S_0 e^{\sigma x_{t_2}+(r-\sigma^2/2)t_2}\big]\big/\big[S_0 e^{\sigma x_{t_1}+(r-\sigma^2/2)t_1}\big] dW(\{x_t\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2}-x_{t_1})+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} p_{t_1}(0,x_{t_1})\, p_{t_2-t_1}(x_{t_1},x_{t_2})\, dx_{t_1} dx_{t_2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2}-x_{t_1})+(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} e^{-\frac{x_{t_1}^2}{2t_1}}\, e^{-\frac{(x_{t_1}-x_{t_2})^2}{2(t_2-t_1)}}\, \frac{dx_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dx_{t_2}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Jetzt substituieren wir x_{t_2} durch $y := x_{t_2} - x_{t_1}$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}_W\big[S^{(r)}_{t_2}/S^{(r)}_{t_1}\big] &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma y + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} e^{-\frac{x_{t_1}^2}{2t_1}}\, e^{-\frac{y^2}{2(t_2-t_1)}}\, \frac{dx_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma y + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}\, e^{-\frac{y^2}{2(t_2-t_1)}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \\
&= e^{(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma\sqrt{t_2-t_1}v}\, e^{-\frac{v^2}{2}}\, \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{(r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)}\, e^{\sigma^2/2(t_2-t_1)} \\
&= e^{r(t_2-t_1)} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Schliesslich haben wir

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\tilde W}\big[S^{(\mu)}_{t_2}/S^{(\mu)}_{t_1}\big] &= \int \big[S_0 e^{\sigma x_{t_2} + (\mu-\sigma^2/2)t_2}\big] / \big[S_0 e^{\sigma x_{t_1} + (\mu-\sigma^2/2)t_1}\big]\, dW(\{x_t\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2}-x_{t_1}) + (\mu-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} \tilde p_{t_1}(0, x_{t_1})\, \tilde p_{t_2-t_1}(x_{t_1}, x_{t_2})\, dx_{t_1} dx_{t_2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2}-x_{t_1}) + (\mu-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} e^{-\frac{[0-x_{t_1}-\frac{\mu-r}{\sigma}t_1]^2}{2t_1}}\, e^{-\frac{[x_{t_1}-x_{t_2}-\frac{\mu-r}{\sigma}(t_2-t_1)]^2}{2(t_2-t_1)}}\, \frac{dx_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dx_{t_2}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}
\end{aligned}
$$

Wir substituieren wieder

$$
\begin{aligned}
y_{t_1} &= x_{t_1} + \tfrac{\mu-r}{\sigma} t_1 \\
y_{t_2} &= x_{t_2} + \tfrac{\mu-r}{\sigma} t_2
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
\sigma y_{t_1} + r t_1 &= \sigma x_{t_1} + \mu t_1 \\
\sigma y_{t_2} + r t_2 &= \sigma x_{t_2} + \mu t_2
\end{aligned}
$$

und erhalten

$$
\mathsf{E}_{\tilde W}\big[S^{(\mu)}_{t_2}/S^{(\mu)}_{t_1}\big] = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(y_{t_2}-y_{t_1}) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} e^{-\frac{y_{t_1}^2}{2t_1}}\, e^{-\frac{[y_{t_1}-y_{t_2}]^2}{2(t_2-t_1)}}\, \frac{dy_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dy_{t_2}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}
$$

und das ist identisch mit der letzten Zeile von (2).