Übung 4: Systemrealisierungen

Aufgabe (4.1) Zeige, daß die beiden Systeme

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} \dot\xi_1 \\ \dot\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \eta = \begin{bmatrix} -11 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

das gleiche Eingabe-Ausgabe-Verhalten aufweisen.

Aufgabe (4.2) Wir betrachten ein gesteuertes System

$$\dot x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

mit konstanten Koeffizienten, das sich zur Anfangszeit $s = 0$ in der Gleichgewichtslage $x(0) = 0$ befindet. Wir definieren die (i. a. matrixwertige) **Transferfunktion**

$$G(z) \ := \ C(z\mathbf{1} - A)^{-1}B.$$

Zeige: Ist $U = \mathfrak{L}u$ die Laplace-Transformierte der Steuerungsfunktion u und ist $Y = \mathfrak{L}y$ die Laplace-Transformierte der Ausgabefunktion y, so gilt $Y = GU$. Berechne ferner die Transferfunktion für die in Aufgabe (4.1) angegebenen Systeme.

Aufgabe (4.3) Berechne die Transferfunktion für das in (1.7) und (3.8) angegebene Satellitenproblem.

Aufgabe (4.4) Wir betrachten ein System

$$\dot x = u(t-1), \quad y(t) = x(t),$$

bei dem die Systemantwort mit einer Zeitverzögerung von einer Zeiteinheit gegenüber der Steuerung erfolgt. Zeige, daß dieses Eingabe-Ausgabe-Verhalten nicht durch ein (endlichdimensionales) lineares System realisiert werden kann.

Aufgabe (4.5) Zeige, daß es kein (endlichdimensionales) lineares System gibt, das für jede Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ auf die Eingabefunktion $u(t) = \cos(\omega t)$ mit der Systemantwort $y(t) = \sin(\omega t)$ reagiert.

Aufgabe (4.6) Eine Funktion $K(t,\tau) = H(t)G(\tau)$ mit $H(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $G(\tau) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sei vorgegeben, und es sei $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige konstante Matrix. Zeige, daß das durch K beschriebene Eingabe-Ausgabe-Verhalten eine Realisierung $\big(A(t), B(t), C(t)\big)$ mit $A(t) \equiv A_0$ besitzt.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeige, daß das Eingabe-Ausgabe-Verhalten

$$y(t) \ = \ \int_s^t \cos(t)e^\tau u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

realisiert werden kann durch ein System der Form

$$\dot x(t) \ = \ ax(t) + b(t)u(t), \qquad y(t) = c(t)u(t).$$

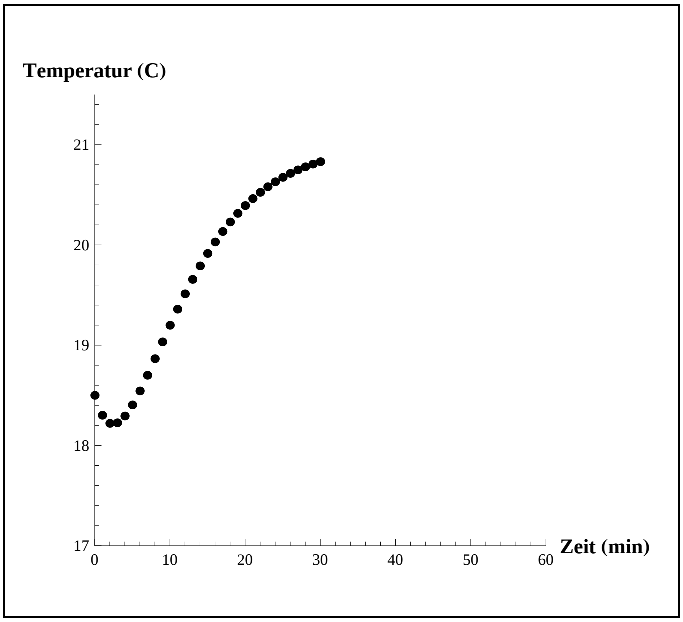
Aufgabe (4.7) Es seien A, B, C, D Matrizen mit $AD = DA$. Zeige, daß das zeitlich veränderliche System

$$\dot x \ = \ Ax + e^{tD}Bu, \qquad y \ = \ Ce^{-tD}x$$

eine zeitinvariante Realisierung besitzt.

Aufgabe (4.8) Es sei (A, B, C) eine Realisierung eines zeitinvarianten linearen Systems. Es sei $P(t) := \exp\big(t(A^T - A)/2\big)$. Zeige, daß dann die (zeitabhängige) Koordinatentransformation $x \mapsto P(t)x$ zu einer Realisierung $\big(\widehat A(t), \widehat B(t), \widehat C(t)\big)$ des betrachteten Systems führt, in der $\widehat A$ symmetrisch und $\widehat A, \widehat B, \widehat C$ beschränkt sind.

Aufgabe (4.9) Ein in einem Gehäuse befindliches Thermometer wird von einem kalten in einen warmen Raum gebracht, und ab diesem Moment ($t = 0$) werden an dem Thermometer Temperaturwerte abgelesen. Diese sind in dem folgendem Diagramm dargestellt. Erkläre den vom Thermometer anfangs angezeigten Temperaturabfall!



Bemerkung: Die Aufgabe wurde aus dem folgenden Buch entnommen: Kai Velten, *Mathematical Modeling and Simulation*; Wiley-VCH, Weinheim 2009, Seiten 122-129 und 139-143.