Übung 3: Beobachtbarkeit

Aufgabe (3.1) Beobachtbarkeit wurde definiert als die Möglichkeit, bei einem Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f\big(x(t), t, u(t)\big)$, $x(t_0) = x_0$ den Anfangszustand $x(t_0)$ aus Messungen $y(t) = g\big(x(t), t, u(t)\big)$ zu schätzen. In vielen Fällen liegt ein parameterabhängiges System

$$\dot{x}(t) \;=\; f\big(x(t), t, u(t); p_1, \ldots, p_m\big), \quad x(t_0) \;=\; x_0$$

vor, und man will aus den Messungen nicht nur den Anfangszustand x_0, sondern auch die Parameterwerte p_i schätzen. Zeige, daß sich diese Fragestellung dem Begriff der Beobachtbarkeit unterordnen läßt!

Aufgabe (3.2) Begründe, warum ein System der folgenden Bauart nicht beobachtbar ist!

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 + b_2 u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Aufgabe (3.3) Bei dem Massen-Dämpfer-System (1.2) kann nur die Position $y = \xi_2$ der zweiten Masse gemessen werden. Reicht diese Information aus, um den Systemzustand zu ermitteln?

Aufgabe (3.4) Bei dem in (1.4) beschriebenen elektrischen Ofen sei nur die Manteltemperatur meßbar. Reicht diese Information aus, um die Temperatur im Ofeninneren zu bestimmen?

Aufgabe (3.5) Bei dem in (1.5) beschriebenen Schaltkreis diene der Strom $y := x_2$ als (einzige) Meßgröße. Zeige: Gilt $L = CR_1R_2$, so ist das System weder vollständig steuerbar noch vollständig beobachtbar.

Aufgabe (3.6) Ein vereinfachtes Modell für das Zusammenleben einer Beutepopulation x und einer Räuberpopulation y sei gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ cx - dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

mit positiven Konstanten $a, b, c, d > 0$. Es sei nur möglich, zu jedem Zeitpunkt t die Gesamtzahl aller Individuen (also Räuber und Beutetiere zusammen) festzustellen. Genügt dies, um die Anzahl der Beutetiere und die Anzahl der Räuber auch separat zu ermitteln?

Aufgabe (3.7) Die folgende Abbildung zeigt zwei Behälter mit Kochsalzlösung. Für $i = 1, 2$ seien V_i das Flüssigkeitsvolumen (in Litern) und x_i die Salzkonzentration (in Gramm pro Liter) im i-ten Behälter. über den Zulauf werde mit konstantem Durchfluß F (in Litern pro Minute) Lösung mit der Salzkonzentration k_0 (in Gramm pro Liter) zugeführt; mit dem gleichen Durchfluß strömt dann Flüssigkeit aus dem ersten in den zweiten Behälter und aus dem zweiten Behälter in ein Auffangbecken, jeweils mit Konzentration k_1 bzw. k_2. Idealisierend nehmen wir an, daß die Salzlösung sowohl im ersten als auch im zweiten Behälter durch ein perfektes Rührgerät jeweils sofort homogen durchmischt wird. Wir fassen nun $u := k_0$ als Steuergröße und $y := k_2$ als Meßgröße auf. Ist das System vollständig steuerbar? Ist es beobachtbar?

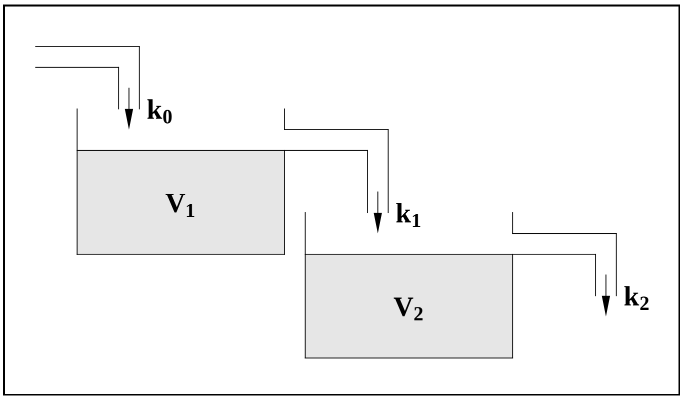

Abb. 3.7: Fluß einer Kochsalzlösung.

Aufgabe (3.8) Wir betrachten das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y \;=\; [c_1 \; c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von $C = (c_1, c_2)$ ist das System nicht beobachtbar? Berechne explizit die Funktion $t \mapsto y(t)$ in diesen Fällen!

(b) Die allgemeine Lösung der Systemgleichung ist eine Linearkombination von Exponentialtermen. Trifft es zu, daß das System nicht beobachtbar ist, wenn in der Ausgabefunktion y einer dieser Exponentialterme nicht auftritt?

(c) Es sei $(c_1, c_2) = (1, 2)$. Das System liefere die Ausgabefunktion $y(t) = -20\exp(-3t) + 21\exp(-2t)$. Rekonstruiere den Anfangszustand $x(0)$.

Aufgabe (3.9) Es sei

$$M(s,t) \;:=\; \int_s^t X(\tau, s)^T C(\tau)^T C(\tau) X(\tau, s)\, \mathrm{d}\tau$$

die Beobachtbarkeitsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Zeige, daß M die folgenden Eigenschaften hat!

(a) Für alle $s < t$ ist $M(s,t)$ symmetrisch und positiv semidefinit.

(b) Für jede feste Zeit t löst die Funktion $s \mapsto M(s,t)$ das Anfangswertproblem $M' = -A^T M - MA - C^T C$, $M(s,s) = \mathbf{0}$.

(c) Für alle Zeiten t_1, t_2, t_3 gilt

$$M(t_1, t_3) \;=\; M(t_1, t_2) + X(t_2, t_1)^T M(t_2, t_3) X(t_2, t_1).$$

Aufgabe (3.10) Wir betrachten ein zeitinvariantes System, und der Rang der Matrix

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

sei $r < n$. Zeige, daß es eine Koordinatentransformation $x \mapsto y$ derart gibt, daß das transformierte System die Form

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \qquad y = C_1 y_1$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ derart annimmt, daß das Teilsystem $\dot{y}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$, $y = C_1 x_1$ beobachtbar ist (während die zweite Komponente y_2 gar nicht in die Messungen eingeht). (Das System zerfällt also in eine direkte Summe aus einem beobachtbaren und einem unbeobachtbaren Teilsystem.)

Aufgabe (3.11) (a) Wir betrachten das zeitinvariante System, das durch die Zustandsgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ und die Messungsgleichung $y(t) = Cx(t)$ gegeben ist. Aus technischen Gründen seien Messungen nur zu festen Zeiten $0, T, 2T, 3T, \ldots$ möglich. Wann läßt sich $x(0)$ aus (hinreichend vielen) Messungen $y(kT)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ bestimmen?

(b) Die Funktion $t \mapsto x(t)$ erfülle die Differentialgleichung $\ddot{x} + x = 0$. Der Wert von x sei zu den Zeiten $k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ bekannt. Lassen sich aus den Werten $x(k\pi)$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Anfangsdaten $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ ermitteln?

Aufgabe (3.12) Wir betrachten die beiden Systeme

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

und

$$\dot{x} = -A^T x + C^T u, \quad y = B^T x.$$

Zeige, daß jedes dieser beiden Systeme genau dann steuerbar ist, wenn das jeweils andere beobachtbar ist.

Aufgabe (3.13) Benutze die vorhergehende Aufgabe, um das Beobachtbarkeitskriterium des Satzes (3.6) unmittelbar aus dem Steuerbarkeitskriterium des Satzes (2.5) herzuleiten.

Aufgabe (3.14) Wir betrachten ein lineares System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

und wenden die Koordinatentransformation $\xi(t) = P(t)x(t)$ an. Wie hängen der Zustandsänderungsoperator X, die Steuerbarkeitsmatrix W und die Beobachtbarkeitsmatrix M des Originalsystems mit den entsprechenden Größen $\widehat{X}$, $\widehat{W}$ und $\widehat{M}$ des transformierten Systems zusammen?

Aufgabe (3.15) Wir betrachten ein lineares System (A, B, C, D) und den Zustandsänderungsoperator $X(t, s)$ der zugehörigen homogenen Gleichung $\dot{x} = Ax$. Zeige: Ist E eine konstante invertierbare Matrix, so liefert die Koordinatentransformation $P(t) := EX(t, s)^{-1}$ ein neues System, bei dem $\widehat{A} = 0$ ist. (Man kann also innere Kräfte eines Systems immer geeignet "wegtransformieren".)