Übung 2: Steuerbarkeit

Aufgabe (2.1) Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stückweise stetig, nehme nur nichtnegative Werte an und erfülle die Bedingung $\int_a^b f = 0$. Zeige, daß dann $f \equiv 0$ gilt.

Aufgabe (2.2) Wir betrachten die Funktionen

$$G(t,\tau) = \begin{bmatrix} t & \tau \\ \tau & t \end{bmatrix}, \quad u_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{bmatrix} 20t^3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimme Lu_1 und Lu_2 für den Operator L, der definiert ist durch $(Lu)(t) := \int_0^t G(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Aufgabe (2.3) Es sei $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Zeige, daß für jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die folgende Gleichung gilt:

$$A\left(\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b A\Phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe (2.4) Es sei

$$W(s,t) = \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau$$

die Steuerbarkeitsmatrix des Systems $\dot{x} = Ax + g + Bu$. Zeige, daß W die folgenden Eigenschaften hat!

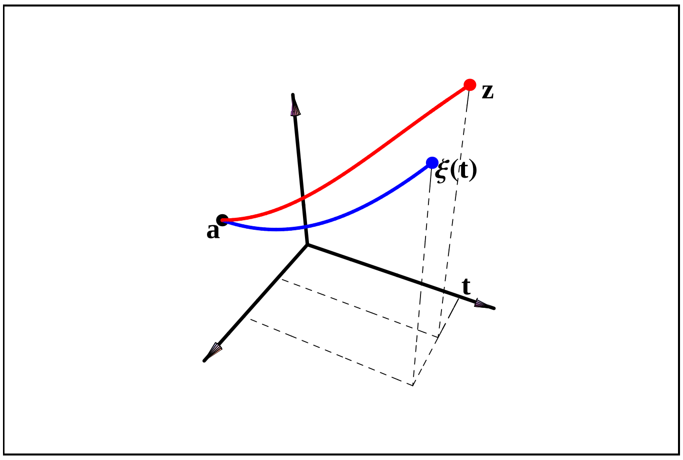
(a) Für alle s, t ist $W(s,t)$ symmetrisch und positiv semidefinit.

(b) Für jede feste Zeit s löst die Funktion $t \mapsto W(s,t)$ das Anfangswertproblem $\dot{W} = AW + WA^T + BB^T$, $W(s,s) = \mathbf{0}$.

(c) Für alle Zeiten t_1, t_2, t_3 gilt

$$W(t_1,t_3) = X(t_3,t_2)W(t_1,t_2)X(t_3,t_2)^T + W(t_2,t_3).$$

Aufgabe (2.5) Deute anhand der folgenden Zeichnung die Aufgabe, ein lineares System $\dot{x} = Ax + g + Bu$ durch geeignete Wahl einer Steuerung u von einem vorgegebenen Anfangszustand $x(s) = a$ in einen gewünschten Zielzustand $x(t) = z$ zu überführen!



Aufgabe (2.6) Zeige, daß das in (1.3) angegebene System für alle Parameterwerte m_i, k_i und d_i vollständig steuerbar ist!

Aufgabe (2.7) Entscheide für $m_1 = m_2 = 1$ und $d_1 = d_2 = 1$, unter welchen Bedingungen das in (1.2) bzw. (2.8) beschriebene schwingende System vollständig steuerbar ist.

Aufgabe (2.8) Bestimme für das in (1.7) und (2.7) betrachtete Satellitenproblem den steuerbaren Unterraum.

Aufgabe (2.9) Gib in Aufgabe (2.7) in den Fällen, in denen das System nicht vollständig steuerbar ist, den steuerbaren Unterraum des Zustandsraums an.

Aufgabe (2.10) Bestimme für das Insektizidproblem $\dot{x} = ax - u$ diejenige Steuerung u, die unter allen Funktionen u mit $x_u(0) = x_0$ und $x_u(T) = 0$ das Integral $\int_0^T u(t)^2 \mathrm{d}t$ minimiert (das man als Maß für den angerichteten Umweltschaden nehmen kann).

Aufgabe (2.11) Berechne die Steuerbarkeitsmatrix $W(0,T)$ für das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Aufgabe (2.12) Das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

soll mit einer geeigneten Steuerung u von dem Anfangszustand $\big(x(0), y(0)\big) = (1,0)$ in den Zielzustand $\big(x(2\pi), y(2\pi)\big) = (0,0)$ überführt werden. Ist dies möglich? Falls ja: Kann die Steuerung speziell so gewählt werden, daß sie auf den Zeitintervallen $[0, 2\pi/3)$, $[2\pi/3, 4\pi/3)$ und $[4\pi/3, 2\pi]$ jeweils konstant ist?

Aufgabe (2.13) Die Matrix Q sei positiv definit. Wann ist das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$$

(mit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ als Zustandsraum) vollständig steuerbar?