Übung 1: Gesteuerte dynamische Systeme

Aufgabe (1.1) Eine Insektenpopulation $t \mapsto x(t)$ entwickle sich gemäß der Gleichung

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) - u(t),$$

wobei $a > 0$ die natürliche Wachstumsrate der Population ist und $u(t)$ die Rate, mit der ein Insektizid versprüht wird (Menge des Insektizids pro Zeiteinheit). Ausgehend von einer Anfangspopulation $x(0) = x_0$ soll zu einer festen Zeit $T > 0$ die Insektenpopulation vernichtet sein, also die Bedingung $x(T) = 0$ erfüllen. Wir betrachten die folgenden Möglichkeiten für die Steuerungsfunktion $t \mapsto u(t)$, die jeweils von drei Parametern A, B und C abhängen.

(a) $u(t) = A + Bt + Ct^2$
(b) $u(t) = A\cos(Ct) + B\sin(Ct)$
(c) $u(t) = Ae^{Bt} + C$

Überprüfe jeweils, ob (und gegebenenfalls wie) die Konstanten A, B und C gewählt werden können, damit die Bedingungen $x(0) = x_0$ und $x(T) = 0$ erfüllt sind.

Aufgabe (1.2) In Aufgabe (1.1) sei der Umweltschaden, den das Versprühen des Insektizids anrichtet, gegeben durch das Integral

$$\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Berechne für die in Aufgabe (1.1) gefundenen Familien von Lösungen jeweils den angerichteten Schaden als Funktion der (frei wählbaren) Parameter. Für welche Parameterwahl wird der Umweltschaden jeweils am geringsten?

Aufgabe (1.3) Betrachte für eine in Aufgabe (1.1) gewählte Steuerungsfunktion $t \mapsto u(t)$ die Funktion

$$c(t) := \int_0^t u(\tau)^2 \mathrm{d}\tau.$$

Welches ist die Bedeutung dieser Funktion? Welches Anfangswertproblem erfüllt die Funktion $t \mapsto \big(x(t), c(t)\big)$? Schreibe ein Programm, das die Kurve $t \mapsto \big(t, x(t), c(t)\big)$ graphisch darstellt! Welche Information liefert der Kurvenverlauf?

Aufgabe (1.4) Für ein vorgegebenes Zeitintervall $[0, T]$ und vorgegebene Rotationsmatrizen $g_0, g_1 \in \mathrm{SO}(3)$ wollen wir $t \mapsto \omega(t)$ so wählen, daß die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{g}(t) = L\big(\omega(t)\big)g(t), \quad g(0) = g_0$$

die Bedingung $g(T) = g_1$ erfüllt. Finde verschiedene Lösungen der Form $\omega(t) = u(t)c$ mit einer skalaren Funktion $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ und einem festen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe (1.5) Ein Medikament werde über den Magen-Darm-Trakt dem Körper zugeführt und erreiche von dort aus den Blutkreislauf. Für jede Zeit t bezeichnen wir mit $M(t)$ die Konzentration des Medikaments im Magen-Darm-Trakt (gemessen in $\mu g/m\ell$), mit $B(t)$ die Konzentration im Blutkreislauf (ebenfalls in $\mu g/m\ell$) und mit $D(t)$ die verabreichte Dosis (gemessen in $(\mu g/m\ell)/h$); diese Funktionen erfüllen ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= -aM(t) + D(t) \\ \dot{B}(t) &= aM(t) - bB(t) \end{aligned}$$

mit Konstanten $a, b > 0$ (gemessen in h^{-1}). Gib die allgemeine Lösung dieses Systems an und spezialisiere dann auf den Fall

$$D(t) = \begin{cases} d, & \text{falls } 6k \leq t \leq 6k + 0.5 \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

dies entspricht der Verabreichung einer konstanten Dosis d alle 6 Stunden, und zwar jeweils eine halbe Stunde lang. (Zahlenwerte für eine numerische Rechnung: $M(0) = B(0) = 0$, $a = \ln(2)/2$, $b = \ln(2)/5$ und $d = 2$.)

Aufgabe (1.6) Die Krebszellen innerhalb eines Tumors werden in drei Kompartimente (entsprechend der Phase ihres Zellzyklus) aufgeteilt:

(1) erste Wachstumsphase und Ruhephase vor der DNS-Reduplikation;
(2) Phase der DNS-Reduplikation;
(3) zweite Wachstumsphase, die zur Zellteilung (Mitose) hinführt.

Für $1 \leq i \leq 3$ sei $x_i(t)$ die Anzahl der Zellen, die sich zur Zeit t im i-ten Kompartiment befinden. Es seien $a, b, c > 0$ die Übergangsraten zwischen den einzelnen Kompartimenten. Stelle zunächst die Differentialgleichung für den Fall auf, daß der Tumor sich selbst überlassen wird (ungesteuertes System)! Untersuche dann den Fall, daß durch eine Therapie in das System eingegriffen wird, und zwar folgendermaßen. Zur Krebsbehandlung mögen zwei Medikamente eingesetzt werden:

- ein Zellgift, das auf die Zellen im dritten Kompartiment wirkt (die besonders empfindlich sind);
- einen Wirkstoff zur Verminderung der Zellteilung, der auf die Zellen im zweiten Kompartiment wirkt, indem er Enzyme blockiert, die die DNS-Reduplikation stimulieren.

Es seien $u(t)$ und $v(t)$ die Dosisraten (Medikamentenmenge pro Zeiteinheit), mit der die beiden Medikamente verabreicht werden. Wie sieht die Differentialgleichung des derart gesteuerten Systems aus?