5. Feedback

Die Systeme, die wir bisher betrachteten, waren von folgendem Typ: Ein System wird durch eine Steuerungsfunktion von außen beeinflußt, entwickelt sich dann zeitlich aufgrund seiner Eigendynamik und der äußeren Steuerung, und durch Auswertung von Messungen erhalten wir Informationen über das System. Diese Informationen werden aber nicht in die Steuerungsfunktion eingespeist; d.h., es gibt keine Rückkopplung ("feedback") zwischen den Messungen an dem System und der Steuerungsfunktion, mit der man von außen in das System eingreift. Ein solches System wird als **offene Regelstrecke** ("open loop system") bezeichnet. Da die Steuerung aufgrund von Modellannahmen und angenommenen Parameterwerten gewählt wird, diese Modellannahmen aber fehlerhaft sein können, haben offene Regelstrecken den großen Nachteil, daß die Steuerung nicht flexibel auf Abweichungen zwischen erwartetem und tatsächlich auftretendem Systemverhalten reagiert. Dies kann man dadurch ändern, daß man die erhaltenen Messungen dazu verwendet, die äußere Steuerung des Systems an sich ändernde Gegebenheiten anzupassen. Die Steuerung ist dann keine von vornherein vorgegebene Funktion der Zeit, sondern hängt auch vom aktuellen Systemzustand ab (der womöglich anders ist als vom Modell vorhergesagt). Ein System, bei dem aktuelle Messungen in die Festlegung der Steuerung mit einfließen, wird als **geschlossener Regelkreis** ("closed loop system") bezeichnet. Den Unterschied zwischen offenen und geschlossenen Regelkreisen kann man sich leicht anhand konkreter Beispiele verdeutlichen.

• Professor S. überlegt sich am Anfang des Semesters, welchen Stoff er in den einzelnen Semesterwochen vortragen will und welche Aufgaben seine Studenten rechnen sollen. Eine offene Regelstrecke liegt vor, wenn Professor S. sein Programm Woche für Woche genau wie geplant abspult, unabhängig davon, ob die Studenten über- oder unterfordert sind und ob sie Begeisterung für den Stoff entwickeln. Ein geschlossener Regelkreis liegt vor, wenn Professor S. Vorschläge und Kritik seiner Studenten aufnimmt und in die weitere Planung der Lehrveranstaltung mit einbezieht.

• Einem Patienten wird ein Medikament verordnet, das er über einen längeren Zeitraum nehmen soll. Eine offene Regelstrecke liegt vor, wenn die Aufnahmehäufigkeit und Dosierung des Medikaments am Anfang der Therapie festgelegt und dann strikt beibehalten wird, unabhängig davon, wie sich der Gesundheitszustand des Patienten entwickelt. Ein geschlossener Regelkreis liegt vor, wenn durch regelmäßige Untersuchungen der Gesundheitszustand überprüft und die Verabreichung des Medikaments entsprechend angepaßt wird.

• In den Wirtschaftswissenschaften ist eine Planwirtschaft ein typisches Beispiel für eine offene Regelstrecke. Über längere Zeiträume (etwa in den Fünfjahresplänen der Sowjetunion zwischen 1928 und 1991) werden volkswirtschaftliche Aktivitäten durchgängig geplant und mit festen Ressourcenzuweisungen und Produktionsvorgaben durchgeführt. In einer Marktwirtschaft wird dagegen der Staat versuchen, mit seinen ordnungs- und finanzpolitischen Maßnahmen flexibel auf Marktänderungen zu reagieren.

(5.1) Definition. *Wir betrachten ein gesteuertes System $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$. Eine* **Feedback-Steuerung** *liegt vor, wenn die Steuerfunktion u so gewählt wird, daß*

$$u(t) \;=\; g\big(t, x(t)\big)$$

mit einer fest vorgegebenen Funktion $(t,x) \mapsto g(t,x)$ gilt. Ist eine Steuerung $t \mapsto u(t)$ so zu finden, daß sich das System

$$\dot{x}(t) \;=\; f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

in gewünschter Weise entwickelt, so liegt eine **offene Regelstrecke** *vor. Ist dagegen eine Funktion $(t,x) \mapsto g(t,x)$ so zu finden, daß sich das System*

$$\dot{x}(t) \;=\; f\Big(t, x(t), g\big(t, x(t)\big)\Big)$$

in gewünschter Weise entwickelt, so liegt ein **geschlossener Regelkreis** *vor.*

Beachte, daß die Wahl einer Steuerung $u(t) := g\big(t, x(t)\big)$ die Kenntnis des Zustands $x(t)$ zu jeder Zeit t voraussetzt. Es müssen also Messungen an dem System vorgenommen werden, und diese Messungen müssen ausreichen, um aus ihnen den Systemzustand (zumindest näherungsweise) ermitteln zu können. Wieder ist die Situation besonders einfach, wenn alle auftretenden Zusammenhänge linear sind.

(5.2) Definition. *Wir betrachten ein lineares gesteuertes System $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$. Eine* **lineare Feedback-Steuerung** *liegt vor, wenn die Steuerfunktion u so gewählt wird, daß*

$$u(t) \;=\; F(t)x(t)$$

mit einer matrixwertigen Funktion $t \mapsto F(t)$ gilt.

In der gerade beschriebenen Situation ist das gesteuerte System dann gegeben durch das lineare System

$$\dot{x}(t) \;=\; \big(A(t) + B(t)F(t)\big)x(t).$$

Dieses ist besonders einfach, wenn nur konstante Koeffizienten auftreten, wenn also A, B und F nicht von der Zeit abhängen, sondern konstant sind. Das Ziel ist in dieser Situation, die Feedback-Matrix F so zu wählen, daß das resultierende gesteuerte System $\dot{x}(t) = (A+BF)x(t)$ sich in gewünschter Weise entwickelt. Da das Systemverhalten im wesentlichen durch die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix bestimmt wird, ist also (bei gegebenen Matrizen A und B) die Feedback-Matrix F so zu wählen, daß $A+BF$ gewünschte Eigenwerte hat. Der folgende Satz (5.5) zeigt, daß wir F stets so wählen können, daß $A+BF$ beliebig vorgegebene Eigenwerte annimmt. (In der Regelungstechnik wird dies als "pole placement" bezeichnet.) Um Satz (5.5) beweisen zu können, benötigen wir zwei Hilfssätze. Der erste Hilfssatz betrifft den Fall skalarer Steuerungsfunktionen.

(5.3) Lemma. *Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, und es sei $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$ das charakteristische Polynom von A. Weiter sei $q(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0)$ ein vollkommen beliebiges reelles Polynom mit dem Leitkoeffizienten $(-1)^n$. Das System $\dot{x} = Ax + Bu$ sei vollständig steuerbar. Dann gibt es eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (also einen Zeilenvektor) derart, daß $A+BF$ das charakteristische Polynom q hat.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $A = \widehat{A}$ und $B = \widehat{B}$ mit

$$\widehat{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und } \widehat{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Durch Entwickeln nach der letzten Zeile erkennt man sofort, daß $\widehat{A}$ das gleiche charakteristische Polynom wie A hat. Man rechnet nun schnell nach, daß mit

$$F \; := \; (a_0 - b_0, a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_{n-1} - b_{n-1}) \; \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

die Gleichung

$$A + BF \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} \end{bmatrix}$$

gilt, aus der folgt, daß $A+BF$ das charakteristische Polynom q hat. In dem betrachteten Spezialfall sind wir also schon fertig.

Der allgemeine Fall wird nun auf diesen Spezialfall zurückgeführt. Wegen der vorausgesetzten Steuerbarkeit ist die Kalman-Matrix $K = (B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B)$ invertierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} AK &= A(B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B) \\ &= (AB \mid A^2B \mid A^3B \mid \cdots \mid A^nB) \\ &= (AB \mid A^2B \mid A^3B \mid \cdots \mid -\sum_{k=0}^{n-1} a_kA^kB) \\ &= (B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B) \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & -a_2 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= K\widehat{A}^T, \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile den Satz von Hamilton und Cayley benutzten. Durchführung der gleichen Rechnung mit der Matrix $\widehat{A}$ (die ja das gleiche charakteristische Polynom hat wie A) liefert $\widehat{A}\widehat{K} = \widehat{K}\widehat{A}^T$, wobei wir $\widehat{K} := (\widehat{B} \mid \widehat{A}\widehat{B} \mid \widehat{A}^2\widehat{B} \mid \cdots \mid \widehat{A}^{n-1}\widehat{B})$ setzten. Wir haben daher

$$K^{-1}AK \;=\; \widehat{A}^T \;=\; \widehat{K}^{-1}\widehat{A}\widehat{K}$$

und damit $\widehat{A} = T^{-1}AT$ mit $T := K\widehat{K}^{-1}$. Ferner ist $\widehat{B} = \widehat{K}e_1 = \widehat{K}(K^{-1}B) = T^{-1}B$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Der zweite Hilfssatz ist ein geschickter Trick, den Fall vektorwertiger Stuerungen auf den Fall skalarwertiger Steuerungen zurückzuführen.

(5.4) Lemma von Heymann. *Das System*

$$\dot{x}(t) \;=\; Ax(t) + Bu(t) \quad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m})$$

sei vollständig steuerbar. Es sei $v \in \mathbb{R}^m$ irgendein Vektor mit $Bv \neq 0$; wir setzen $\widehat{B} := Bv \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dann gibt es eine Matrix $\widehat{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ derart, daß das System

$$\dot{x}(t) \;=\; (A + B\widehat{F})x(t) + \widehat{B}\widehat{u}(t)$$

ebenfalls vollständig steuerbar ist. (Damit wird der m-dimensionale Kontrollvektor $u \in \mathbb{R}^m$ des Originalsystems durch die eindimensionalen (skalare) Kontrolle $\widehat{u} \in \mathbb{R}$ ersetzt.)

Beweis. Wir konstruieren Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ sowie $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m$ derart, daß für $1 \leq d \leq n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $x_1, \ldots, x_d$ sind linear unabhängig;
(2) für $j < d$ gilt $Ax_j \in \langle\!\langle x_1, \ldots, x_d \rangle\!\rangle$.

(Dabei bezeichnet $\langle\!\langle x_1, \ldots, x_d \rangle\!\rangle = \mathbb{R}x_1 + \cdots + \mathbb{R}x_d$ den von $x_1, \ldots, x_d$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.) Die Konstruktion ist iterativ und beginnt mit $x_1 := \widehat{B} \neq 0$. Sind $x_1, \ldots, x_d$ und $u_1, \ldots, u_{d-1}$ bereits konstruiert, so unterscheiden wir zwei Fälle. **Erster Fall:** $Ax_d \notin \langle\!\langle x_1, \ldots, x_d \rangle\!\rangle$. In diesem Fall setzen wir $x_{d+1} := Ax_d$ und $u_d := 0$. **Zweiter Fall:** $Ax_d \in \langle\!\langle x_1, \ldots, x_d \rangle\!\rangle$. In diesem Fall ist $\langle\!\langle x_1, \ldots, x_d \rangle\!\rangle$ invariant unter A. Dann kann das

Bild von B nicht in $\langle\langle x_1, \dots, x_d\rangle\rangle$ enthalten sein; sonst enthielte $\langle\langle x_1, \dots, x_d\rangle\rangle$ wegen der A-Invarianz auch das Bild von $(B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B)$, und dieses ist wegen der vorausgesetzten Steuerbarkeit ganz $\mathbb{R}^n$. Es gibt also einen Vektor $u_d \in \mathbb{R}^m$ mit $Bu_d \notin \langle\langle x_1, \dots, x_d\rangle\rangle$. Dann liegt natürlich auch $x_{d+1} := Ax_d + Bu_d$ nicht in $\langle\langle x_1, \dots, x_d\rangle\rangle$. Damit sind x_{d+1} und u_d auch im zweiten Fall definiert, was den Konstruktionsschritt abschließt. Am Ende setzen wir noch $u_n := 0$.

Wir führen nun die Matrizen $X := (x_1 \mid \cdots \mid x_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $U := (u_1 \mid \cdots \mid u_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ein. Da $x_1, \dots, x_n$ nach Konstruktion linear unabhängig sind, ist X invertierbar. Wir behaupten, daß

$$\widehat{F} \;:=\; UX^{-1} \;\in \mathbb{R}^{m\times n}$$

die gewünschte Eigenschaft hat. Wegen $\widehat{F}X = U$ gilt $\widehat{F}x_d = u_d$ für $1 \le d \le n$. Setzen wir $\widehat{A} := A + B\widehat{F}$, so gilt für $1 \le d \le n-1$ die Beziehung

$$x_{d+1} = Ax_d + Bu_d = Ax_d + B\widehat{F}x_d = (A + B\widehat{F})x_d = \widehat{A}x_d;$$

wegen $x_1 = \widehat{B}$ folgt hieraus $X = (\widehat{B} \mid \widehat{A}\widehat{B} \mid \widehat{A}^2\widehat{B} \mid \cdots \mid \widehat{A}^{n-1}\widehat{B})$. Nach Konstruktion ist X invertierbar; nach dem Kalman-Kriterium ist daher das durch das Paar $(\widehat{A}, \widehat{B})$ gegebene System vollständig steuerbar. ∎

Durch Kombination von (5.3) und (5.4) können wir nun das angekündigte Ergebnis beweisen.

(5.5) Satz. *Das System $\dot{x} = Ax + Bu$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sei vollständig steuerbar, und es sei p ein beliebiges Polynom mit dem Leitkoeffizienten $(-1)^n$. Dann gibt es eine Matrix F derart, daß $A + BF$ das charakteristische Polynom p hat.*

Beweis. Im Fall $m = 1$ ist dies die Aussage von Lemma (5.3). Im Fall $m > 1$ wählen wir $\widehat{A} = A + B\widehat{F}$ und $\widehat{B} = Bv$ wie im Lemma von Heymann. Anwendung von Lemma (5.3) auf das Paar $(\widehat{A}, \widehat{B})$ liefert eine Matrix $z \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (also einen Zeilenvektor) derart, daß $\widehat{A} + \widehat{B}z$ das charakteristische Polynom p hat. Nun ist

$$\widehat{A} + \widehat{B}z \;=\; A + B\widehat{F} + (Bv)z \;=\; A + B\,(\widehat{F} + vz);$$

also hat $F := \widehat{F} + vz$ die gewünschte Eigenschaft. ∎

In vielen Fällen besteht ein praktisches Steuerungsproblem darin, ein System um eine Gleichgewichtslage zu stabilisieren. (Ein Beispiel aus dem Alltagsleben ist etwa ein Heizungsthermostat zur Aufrechterhaltung einer gewünschten Raumtemperatur.) Ist das System von der Form $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ mit der betrachteten Gleichgewichtslage $x_0 = 0$, so können wir gemäß (5.5) eine Matrix F so wählen, daß $A + BF$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat. Wählen wir dann die Steuerung $u(t) := Fx(t)$, so nimmt das gesteuerte System die Form $\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$ an, und aufgrund der Wahl von F ist für dieses System die Gleichgewichtslage $x_0 = 0$ sogar global asymptotisch stabil. Die Regelung hat also den (gewünschten) Effekt, daß das System bei auftretenden Abweichungen von der Gleichgewichtslage immer wieder zu dieser zurückgesteuert wird. Es ist vielleicht überraschend, daß sich diese Idee zum Auffinden einer geeigneten Steuerung auch bei nichtlinearen Systemen einsetzen läßt, wo mit Hilfe der Methode der **Feedback-Linearisierung** die Steuerung so gewählt wird, daß die Nichtlinearitäten verschwinden und das gesteuerte System eine lineare Form annimmt. Wir wollen diese Methode nicht systematisch untersuchen, sondern nur anhand zweier einfacher Beispiele illustrieren.

(5.6) Beispiel. Ein Tank habe ein Abflußrohr mit dem Querschnitt a. Der Wasserstand im Tank soll durch Steuerung des Zuflusses $t \mapsto u(t)$ (in Litern pro Minute) einen gewünschten Verlauf $t \mapsto z(t)$ annehmen. (Beispielsweise könnte z eine konstante Funktion sein, wenn eine feste Wasserstandshöhe gehalten werden soll.)

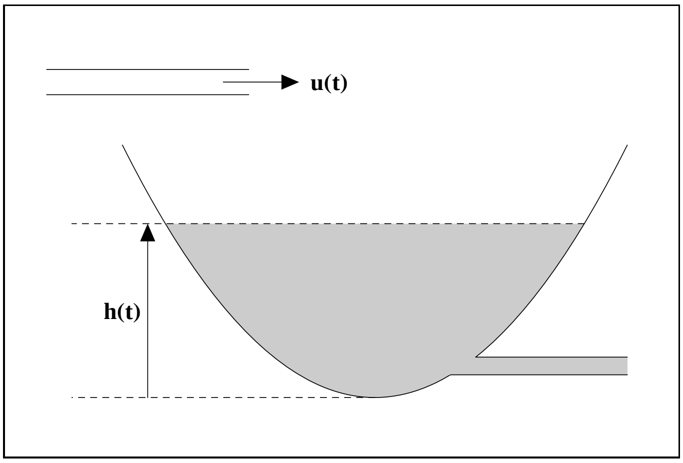

Abb. 5.6: Regelung eines Wasserpegels.

Ist $A(h)$ die Querschnittsfläche des Tanks in der Höhe h, so gilt die Gleichung

$$A\big(h(t)\big)\dot{h}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^{h(t)} A(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \;=\; u(t) - a\sqrt{2gh(t)}.$$

Machen wir für die gesuchte Steuerung u den Ansatz $u(t) = a\sqrt{2gh(t)} + A\big(h(t)\big)v(t)$ mit einer noch zu ermittelnden Funktion v, so geht diese Gleichung über in die lineare Gleichung $\dot{h}(t) = v(t)$. Es sei $\varepsilon(t) := h(t) - z(t)$ die Abweichung zwischen dem tatsächlichen und dem gewünschten Wasserpegel. Der Ansatz

$$v(t) \;:=\; \dot{z}(t) - c\cdot\varepsilon(t)$$

mit einer Konstanten $c > 0$ führt dann auf $\dot{\varepsilon} = \dot{h} - \dot{z} = v - \dot{z} = -c\varepsilon(t)$ mit der allgemeinen Lösung $\varepsilon(t) = e^{-ct}\varepsilon(0)$. Die gewählte Zuflußsteuerung

$$u(t) \;:=\; a\sqrt{2gh(t)} + A\big(h(t)\big)\Big(\dot{z}(t) - c\big(h(t) - z(t)\big)\Big)$$

liefert also (zumindest asymptotisch für $t \to \infty$) den gewünschten Verlauf für die Wasserstandshöhe. Beachte, daß die Implementierung dieser Steuerung ständige Messungen des Wasserpegels erfordert! (Ob die angegebene Steuerung praktisch einsetzbar ist, hängt von den Gegebenheiten ab, etwa der Stärke der eingesetzten Pumpe zur Steuerung des Zuflusses.)

(5.7) Beispiel. Wir betrachten den abgebildeten zweigliedrigen Roboterarm.

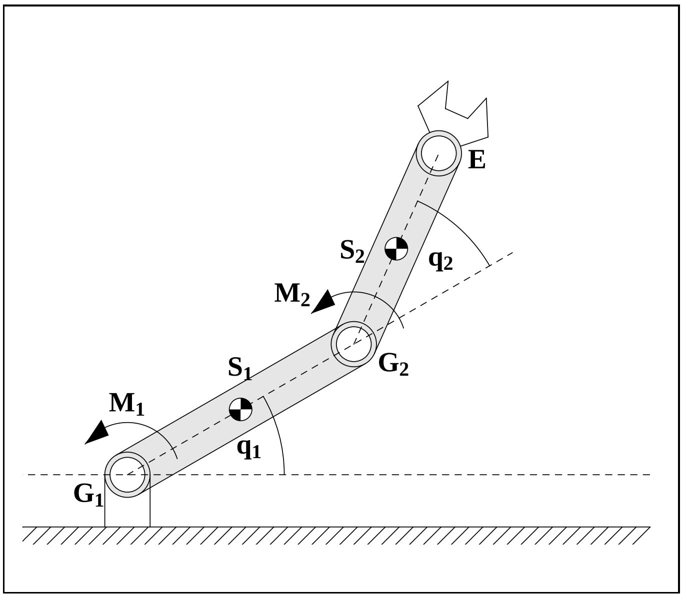

Abb. 5.7: Zweigliedriger Roboterarm.

Es seien q_1 und q_2 die beiden Winkel, die die Konfiguration des Roboters beschreiben, und M_1 und M_2 die durch Elektromotoren extern aufgebrachten Drehmomente (die wir hier als Steuerungsgrößen auffassen). Die Theorie der Starrkörperbewegung zeigt, daß sich der Roboterarm gemäß einer Gleichung der Form

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q) \;=\; M$$

mit matrixwertigen Funktionen H und C sowie einer vektorwertigen Funktion g bewegt, wobei wir kurz $q = (q_1, q_2)^T$ und $M = (M_1, M_2)^T$ schreiben. Wir wollen nun die Steuerung $t \mapsto M(t)$ so wählen, daß der Roboterarm eine gewünschte Bewegung $q(t) = z(t)$ mit einer vorgegebenen Zielfunktion z ausführt. Wir machen dazu den Ansatz

$$M(t) \;=\; H\big(q(t)\big)v(t) + C\big(q(t),\dot{q}(t)\big)\dot{q}(t) + g\big(q(t)\big)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion v. Mit diesem Ansatz geht die Bewegungsgleichung in die lineare Gleichung $\ddot{q}(t) = v(t)$ über. Ist $\varepsilon(t) := q(t) - z(t)$ die Abweichung zwischen der tatsächlichen und der angestrebten Roboterkonfiguration und machen wir für v den Ansatz

$$\begin{aligned} v(t) \;&:=\; \ddot{z}(t) - 2a\cdot\dot{\varepsilon}(t) - b\cdot\varepsilon(t) \\ &= \ddot{z}(t) - 2a\cdot\big(\dot{q}(t)-\dot{z}(t)\big) - b\cdot\big(q(t)-z(t)\big) \end{aligned}$$

bzw. kurz

$$v \;=\; \ddot{z} - 2a\dot{\varepsilon} - b\varepsilon \;=\; \ddot{z} - 2a(\dot{q}-\dot{z}) - b(q-z)$$

mit beliebigen Konstanten $a, b > 0$, so geht die Gleichung $\ddot{q} = v$ über in

$$\ddot{\varepsilon} + 2a\dot{\varepsilon} + b\varepsilon \;=\; 0.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2a\lambda + b$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, die beide negativen Realteil haben (bzw. für $0 < b \leq a$ einfach negativ sind); jede Lösung dieser Differentialgleichung geht also für $t \to \infty$ exponentiell gegen Null. Die angegebene Regelung bewirkt also mit guter Näherung die gewünschte Bewegung des Roboterarms. Beachte, daß in die Steuerungsfunktion sowohl die Werte $q_i(t)$ als auch die Ableitungswerte $\dot{q}_i(t)$ eingehen; zur Implementierung der Steuerung müssen also sowohl Positions- als auch Geschwindigkeitsmessungen vorliegen.