4. Systemrealisierungen

Bisher betrachteten wir ein gegebenes System und fragten, ob sich dieses System steuern bzw. ob sich aus Messungen an dem System der Systemzustand rekonstruieren läßt. Wir ändern nun unsere Fragestellung und wollen untersuchen, ob sich aus dem Eingabe-Ausgabe-Verhalten des Systems die Systemgleichungen rekonstruieren lassen. Wir interpretieren das System also als "black box", von dem wir nur wissen, wie es auf verschiedene Anregungen von außen reagiert, dessen Systemverhalten wir aber in Form einer Evolutionsgleichung beschreiben wollen. Dazu beschränken wir uns auf lineare Systeme, auf die außer der ausgeübten Kontrolle keine weiteren externen Einflüsse wirken, also Systeme der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix},$$

und gehen davon aus, daß sich ein solches System zu einer Referenzzeit s im Gleichgewichtszustand $x(s) = 0$ befindet. Gemäß (3.3) liefert dieses System dann die Messungen

$$y(t) = \int_s^t C(t)X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + D(t)u(t)\,.$$

(Beachte, daß y linear von u abhängt, was aufgrund des Superpositionsprinzips für lineare Systeme natürlich der Fall sein muß.) Betrachten wir stattdessen nach Abzug der bekannten Größe $D(t)u(t)$ die "bereinigten" Messungen $y_0(t) := y(t) - D(t)u(t)$, so dürfen wir $D = 0$ und damit die Eingabe-Ausgabe-Relation

$$y(t) = \int_s^t C(t)X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

annehmen. Es gibt nun Situationen, in denen A, B und C nicht bekannt sind, in denen man aber für verschiedene Steuerungen u die zugehörigen Systemantworten y ermitteln kann (etwa experimentell). Die Frage ist dann, ob sich A, B und C aus dem Eingabe-Ausgabe-Verhalten des Systems rekonstruieren lassen. (Ist dies möglich, so kann man einen Analogsimulator für das betrachtete System konstruieren, ein (typischerweise elektronisches) Gerät, das das Systemverhalten simuliert und zum Studium der Systemeigenschaften benutzt werden kann.) Dazu führen wir die folgende Definition ein.

(4.1) Definition. *Gegeben sei eine Eingabe-Ausgabe-Relation*

$$(\star) \qquad y(t) = \int_s^t K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

mit einer als bekannt vorausgesetzten Funktion K. Ein Tripel (A,B,C) matrixwertiger Funktionen $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $t \mapsto C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ heißt **Realisierung** *der betrachteten Eingabe-Ausgabe-Relation $(\star)$, wenn für den zugehörigen Zustandsänderungsoperator X die Beziehung*

$$K(t,\tau) = C(t)X(t,\tau)B(\tau) \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

gilt, wenn also K gerade das Eingabe-Ausgabe-Verhalten des linearen Systems $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ wiedergibt. $\big($Wir nennen dies kurz das System (A,B,C).$\big)$ Eine Realisierung heißt **minimal**, *wenn die Dimension n des Zustandsraums die minimal mögliche ist.*

Hat man eine Realisierung eines Systems gefunden, so lassen sich mit Hilfe von Koordinatentransformationen viele weitere Realisierungen finden. Der folgende Satz zeigt, wie sich Realisierungen unter Koordinatentransformationen des Zustandsraums verhalten.

(4.2) Bemerkung. Wir fragen, wie sich ein lineares System

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

unter einer Koordinatentransformation

$$\xi(t) = P(t)x(t)$$

verhält. Zunächst haben wir $\dot{\xi} = \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + P(Ax + Bu) = (PA + \dot{P})x + PBu = (PA + \dot{P})P^{-1}\xi + PBu$ und $y = Cx + Du = CP^{-1}\xi + Du$, also

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix}$$

mit

$$\widehat{A} = PAP^{-1} + \dot{P}P^{-1},\ \widehat{B} = PB,\ \widehat{C} = CP^{-1},\ \widehat{D} = D.$$

Für den Zustandsänderungsoperator, die Steuerbarkeitsmatrix und die Beobachtbarkeitsmatrix erhalten wir die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \widehat{X}(t,s) &= P(t)X(t,s)P(s)^{-1}, \\ \widehat{W}(t,s) &= P(s)W(s,t)P(s)^T, \\ \widehat{M}(s,t) &= P(s)^{T-1}M(s,t)P(s)^{-1}. \end{aligned}$$

(Nachweis als Übungsaufgabe!) Es ist klar, daß das Tripel $(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})$ das gleiche Eingabe-Ausgabe-Verhalten induziert wie das Tripel (A,B,C), denn $\widehat{C}(t)\widehat{X}(t,\tau)\widehat{B}(\tau)$ stimmt überein mit

$$\big(C(t)P(t)^{-1}\big)\big(P(t)X(t,\tau)P(\tau)^{-1}\big)\big(P(\tau)B(\tau)\big)$$

und damit mit $C(t)X(t,\tau)B(\tau)$. Wir können also aus einer gegebenen Realisierung immer durch eine Koordinatentransformation eine neue Realisierung einer Eingabe-Ausgabe-Relation erhalten.

Der folgende Satz zeigt, welche Funktionen ("Integralkerne") $(t,\tau) \mapsto K(t,\tau)$ bei Eingabe-Ausgabe-Relationen linearer Systeme auftreten können.

(4.3) Satz. *Genau dann gibt es zu einer Funktion $(t,\tau) \mapsto K(t,\tau)$ eine Realisierung (A,B,C), wenn eine Zerlegung der Form*

$$K(t,\tau) \;=\; H(t)G(\tau)$$

existiert. Genau dann existiert eine zeitunabhängige Realisierung (bei der A, B und C also konstante Matrizen sind), wenn es zusätzlich eine Funktion g gibt mit

$$K(t,\tau) \;=\; g(t-\tau)$$

für alle $t,\tau \geq s$. (In diesem Fall ist also die Systemantwort durch das Faltungsintegral $y(t) = \int_s^t g(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ gegeben.)

Beweis. Beschreibt K das Eingabe-Ausgabe-Verhalten des linearen Systems (A,B,C), so haben wir

$$K(t,\tau) \;=\; C(t)X(t,\tau)B(\tau) \;=\; C(t)X(t,s)X(s,\tau)B(\tau)$$

und damit $K(t,\tau) = H(t)G(\tau)$ mit $H(t) := C(t)X(t,s)$ und $G(\tau) := X(s,\tau)B(\tau)$. Gibt es umgekehrt eine Zerlegung $K(t,\tau) = H(t)G(\tau)$, so setzen wir $A(t) := \mathbf{0}$, $B(t) := G(t)$ und $C(t) := H(t)$ und haben dann $X(t,s) = \mathbf{1}$ und für $x(s) = 0$ daher $y(t) = \int_s^t C(t)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, so daß das lineare System (A,B,C) tatsächlich das durch K gegebene Eingabe-Ausgabe-Verhalten aufweist. (Wenn es also überhaupt eine Realisierung (A,B,C) gibt, so gibt es auch eine mit $A = \mathbf{0}$.)

Besitzt K eine *konstante* Realisierung (A,B,C), so haben wir $X(t,\tau) = e^{(t-\tau)A}$ und damit

$$K(t,\tau) \;=\; Ce^{(t-\tau)A}B \;=\; g(t-\tau)$$

mit $g(\theta) := Ce^{\theta A}B$. Hat umgekehrt K die Form $K(t,\tau) = g(t-\tau)$ mit einer Funktion g, so gibt es eine konstante Realisierung des betrachteten Eingabe-Ausgabe-Verhaltens; den Nachweis dieser Behauptung stellen wir vorerst zurück und holen ihn in (4.6) nach, wenn uns etwas mehr Theorie zur Verfügung steht. ∎

(4.4) Bemerkung. Ergänzen wir zu einem gegebenen System

$$(\star) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

neue Zustandsgleichungen, die nicht in die Messungen einfließen, sagen wir

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{\text{neu}} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{\text{neu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{\text{neu}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u,$$
$$y \;=\; [C \; 0] \begin{bmatrix} x \\ x_{\text{neu}} \end{bmatrix},$$

so erhalten wir ein System mit größerem Zustandsraum, das die gleiche Eingabe-Ausgabe-Relation wie das ursprüngliche System aufweist, dessen Zustandsraum aber sozusagen künstlich "aufgebläht" wurde. Ergänzen wir das betrachtete System zu einem System der Form

$$\begin{bmatrix} x \\ x_{\text{neu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{\text{neu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{\text{neu}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_{\text{neu}} \end{bmatrix} u,$$
$$\begin{bmatrix} y \\ y_{\text{neu}} \end{bmatrix} = [C \; C_{\text{neu}}] \begin{bmatrix} x \\ x_{\text{neu}} \end{bmatrix},$$

so erhalten wir ebenfalls ein System mit einem höherdimensionalen Zustandsraum und dem gleichen Eingabe-Ausgabe-Verhalten wie das Originalsystem, das aber nun nicht mehr vollständig steuerbar ist. Die Tatsache, daß ein System nicht steuerbar ist, bedeutet ein Defizit in der Kopplung zwischen Eingabe (Steuerung) und Systemzustand (es gibt zu wenig Steuerungsmöglichkeiten, um den Zustand vollständig beeinflussen zu können); die Tatsache, daß ein System nicht beobachtbar ist, bedeutet ein Defizit in der Kopplung zwischen Ausgabe (Messungen) und Systemzustand (die verfügbaren Messungen liefern nicht genug Information, um den Zustand vollständig bestimmen zu können). Die Vermutung liegt daher nahe, daß eine Realisierung genau dann minimal ist, wenn sie ein vollständig steuerbares und beobachtbares System darstellt. Der folgende Satz bestätigt diese Vermutung.

(4.5) Satz. *Es sei (A,B,C) eine Realisierung der Eingabe-Ausgabe-Relation $y(t) = \int_s^t K(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Genau dann ist (A,B,C) minimal, wenn (A,B) vollständig steuerbar und (A,C) beobachtbar ist.*

Beweis. Wir nehmen an, (A,B) sei nicht vollständig steuerbar; wir wollen zeigen, daß dann die Realisierung (A,B,C) nicht minimal sein kann. Da für ein nicht vollständig steuerbares Paar (A,B) die Matrix $W(s,t)$ nur positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist, gibt es eine Transformationsmatrix T mit

$$TW(s,t)T^T \;=\; \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_{n-p} \end{bmatrix} \quad \text{mit } p < n.$$

Wähle mit dieser Matrix T die Koordinatentransformation $P(t) = TX(t,s)^{-1}$; dann ist $(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}) = (\mathbf{0}, PB, CP^{-1})$ eine Realisierung mit der Steuerbarkeitsmatrix $\widehat{W}(s,t) = P(s)W(s,t)P(s)^T = \big(TX(s,s)^{-1}\big)W(s,t)\big(TX(s,s)\big)^T = TW(s,t)T^T$. Andererseits gilt $\widehat{X} \equiv \mathbf{1}$ (wegen $\widehat{A} = 0$) und daher

$$\begin{bmatrix} \star & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{W}(s,t) = \int_s^t \widehat{X}(s,t)^T \widehat{B}(\tau)\widehat{V}(\tau)^T \widehat{X}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_s^t \widehat{B}(\tau)\widehat{B}(\tau)^T \mathrm{d}\tau, \text{ folglich } \widehat{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mit } B_0 \in \mathbb{R}^{p\times m}.$$

Dann ist aber $(\widehat{O}, B_0, C_0)$ eine Realisierung mit kleinerem Zustandsraum als (A,B,C). (Die Vorgehensweise liefert eine Konstruktion, wie man für eine nichtminimale Realisierung (A,B,C) eine neue Realisierung mit kleinerem Zustandsraum erhält.) Analog zeigt man, daß die Realisierung (A,B,C) auch dann nicht minimal sein kann, wenn (A,C) nicht beobachtbar ist (Übungsaufgabe!).

Umgekehrt seien (A,B) vollständig steuerbar und (A,C) beobachtbar. Wir nehmen nun an, die Realisierung (A,B,C) sei nicht minimal, und es sei $(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})$ eine Realisierung mit kleinerer Dimension des Zustandsraums, sagen wir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $m < n$. Dann gilt $K(t,\tau) = H(t)G(\tau) = \widehat{H}(t)\widehat{G}(\tau)$, wobei n die Zeilenzahl von G bzw. die Spaltenzahl von H ist sowie m die Zeilenzahl von $\widehat{G}$ bzw. die Spaltenzahl von $\widehat{H}$. Dann gilt $H(t)^T H(t)G(\tau)G(\tau)^T = H(t)^T \widehat{H}(t)\widehat{G}(\tau)G(\tau)^T$ für alle t,τ, nach Integration also

$$\begin{aligned}
&M(s,t)W(s,t)\\
&= \left(\int_s^t H(\theta)^T H(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_s^t G(\tau)G(\tau)^T\mathrm{d}\tau\right)\\
&= \left(\int_s^t H(\theta)^T \widehat{H}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_s^t \widehat{G}(\tau)G(\tau)^T\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind $M(s,t)$ und $W(s,t)$ invertierbar, so daß die linke Seite dieser Gleichung den vollen Rang n hat. Dagegen ist die rechte Seite der Gleichung das Produkt einer Matrix mit m Spalten und einer Matrix mit m Zeilen, also das Produkt zweier Matrizen vom Rang $m < n$ und damit eine Matrix, die nicht vollen Rang hat. ■

Wir haben damit gezeigt, daß bei einer *minimalen* Realisierung die Zerlegung $K(t,\tau) = H(t)G(\tau)$ so gewählt werden kann, daß die Matrizen $\int_s^t H^T H$ und $\int_s^t GG^T$ (für feste Zeiten s und t) positiv definit sind. Dies nutzen wir nun aus, um den Beweis von Satz (4.3) zu Ende zu führen.

(4.6) Ende des Beweises des in (4.3) formulierten Satzes. Es sei $K(t,\tau) = H(t)G(\tau)$ derart, daß dieser Ausdruck nur von $t-\tau$ abhängt; wir wollen zeigen, daß die fragliche Eingabe-Ausgabe-Relation sich durch ein System mit konstanten Koeffizienten realisieren läßt. Zunächst gibt es nach Satz (4.5) eine minimale Realisierung, bei der $\int_s^t H^T H$ und $\int_s^t GG^T$ positiv definit sind; dabei seien s und t fest gewählt. Wegen $K(\theta,\tau) = K(\theta-\tau,0)$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}K(\theta,\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}K(t,\tau)\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\big(H(\theta)G(\tau)\big) + \frac{\partial}{\partial\tau}\big(H(\theta)G(\tau)\big)\\
&= H'(\theta)G(\tau) + H(\theta)G'(\tau)
\end{aligned}$$

und damit auch

$$0 = H'(\theta)G(\tau)G(\tau)^T + H(\theta)G'(\tau)G(\tau)^T.$$

Wir integrieren nun diese Gleichung zwischen den Zeiten $\theta = s$ und $\theta = t$, beachten, daß $\int_s^t GG^T$ positiv definit und damit invertierbar ist und erhalten mit

$$A := -\left(\int_s^t G'(\tau)G(\tau)^T\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_s^t G(\tau)G(\tau)^T\mathrm{d}\tau\right)^{-1}$$

die Gleichung $H'(\theta) = H(\theta)A$, folglich $H(\theta) = H(0)e^{\theta A}$ für alle θ. Dies liefert

$$\begin{aligned}
K(t,\tau) &= K(t-\tau,0) = H(t-\tau)G(0)\\
&= H(0)e^{(t-\tau)A}G(0),
\end{aligned}$$

wobei jetzt t wieder eine beliebige Zeit ist. Dies zeigt, daß $\big(A, G(0), H(0)\big)$ eine (offensichtlich konstante) Realisierung ist. ■

(4.7) Beispiel. Wir suchen ein lineares System, dessen Eingabe-Ausgabe-Verhalten durch die Gleichung

$$y(t) = \int_s^t \sin(t)\sin(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

gegeben ist. Wir suchen eine Realisierung mit einem eindimensionalen Zustandsraum mit zeitlich konstanter Zustandsmatrix $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Die zu lösende Gleichung ist dann

$$\sin(t)\sin(\tau) = c(t)e^{(t-\tau)a}b(\tau),$$

und Lösungen sind (bei vollkommen beliebiger Wahl von a!) offenbar gegeben durch $c(t) := e^{-ta}\sin(t)$ und $b(\tau) := e^{\tau a}\sin(\tau)$. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist also ein lineares System, das das angegebene Eingabe-Ausgabe-Verhalten hat, gegeben durch

$$\dot{x}(t) = ax(t) + e^{ta}\sin(t)u(t), \qquad y(t) = e^{-at}\sin(t)x(t).$$

Eine Realisierung durch ein zeitinvariantes System ist nicht möglich, weil der Integralkern $K(t,\tau) = \sin(t)\sin(\tau)$ nicht nur von der Differenz $t-\tau$ abhängt.

(4.8) Beispiel. Wir suchen ein lineares System, dessen Eingabe-Ausgabe-Verhalten durch die Gleichung

$$y(t) = \int_s^t \sin(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

gegeben ist. Hier ist

$$\begin{aligned}
K(t,\tau) &= \sin(t-\tau)\\
&= \sin(t)\cos(\tau) - \cos(t)\sin(\tau)\\
&= \begin{bmatrix}\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\tau)\\ -\sin(\tau)\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Schreiben wir $(\star)$ in der Form

$$K(t,\tau) = \begin{bmatrix}\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\tau)\\ -\sin(\tau)\end{bmatrix},$$

so erkennen wir, daß eine Realisierung gegeben ist durch $A = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie $C(t) = \big(\sin(t), \cos(t)\big)$ und $B(\tau) = \big(\cos(\tau), -\sin(\tau)\big)^T$ und damit durch das System

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{bmatrix}u(t),\\
y(t) &= \sin(t)x_1(t) + \cos(t)x_2(t).
\end{aligned}$$

Dies ist aber ein zeitlich veränderliches System, während es nach Satz (4.3) möglich sein muß, das angegebene Eingabe-Ausgabe-Verhalten auch durch ein zeitinvariantes System zu realisieren. Dazu schreiben wir ($\star$) in der Form

$$
\begin{aligned}
K(t,\tau) &= [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\tau) & \sin(\tau) \\ -\sin(\tau) & \cos(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [\,0 \quad 1\,] \exp\left(t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \exp\left(-\tau \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [\,0 \quad 1\,] \exp\left((t-\tau) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

und erkennen, daß eine Realisierung gegeben ist durch

$$
C = [\,0 \quad 1\,], \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Das vorgegebene Eingabe-Ausgabe-Verhalten wird also realisiert durch das System

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_2(t).
\end{aligned}
$$

Da dieses System steuerbar und beobachtbar ist, handelt es sich um eine minimale Realisierung; eine Realisierung mit einem eindimensionalen Zustandsraum ist nicht möglich.