3. Beobachtbarkeit

(3.1) Definition. *Wir betrachten ein gesteuertes System* $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$ *und eine* **Beobachtungsfunktion** $y = g(t, x, u)$, *die angibt, welchen Wert eine Meßgröße annimmt, wenn zur Zeit* t *eine Messung an dem betrachteten System vorgenommen wird und sich dieses im Zustand* x *unter dem Einfluß der Steuergröße* u *befindet. Wir nennen das System*

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad y(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big)$$

(vollständig) beobachtbar *im Zeitintervall* $[s, t]$, *wenn durch die Meßwerte* $y(\tau)$ *mit* $s \leq \tau \leq t$ *der Anfangszustand* $x(s)$ *eindeutig bestimmt ist.*

Der Zusatz "vollständig" bezieht sich darauf, daß man den gesamten Systemzustand (und nicht nur einzelne Zustandskomponenten) aus den Messungen ermitteln kann.

(3.2) Beispiel. *Ein Schiff bewege sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit* v, *beschreibe also die Bahn* $x(t) = x_0 + tv$. *Von einer Küstenstation wird regelmäßig der Winkel zwischen der Linie Station-Schiff und einer festen Geraden ermittelt. Lassen sich aus diesen Winkelmessungen die Anfangsposition* x_0 *und die Geschwindigkeit* v *des Schiffs ermitteln? Ändert sich die Antwort, wenn statt der Winkelmessungen Entfernungsmessungen durchgeführt werden?*

Lösung. Aus Winkelmessungen allein lassen sich weder x_0 noch v schätzen. Ist nämlich a der Ortsvektor der Küstenstation, so läßt sich die Bahn $x(t) = x_0 + tv$ nicht von der Bahn $\widehat{x}(t) = a + \lambda(x_0 - a) + t \cdot \lambda v$ unterscheiden, wenn $\lambda > 0$ ein beliebiger Streckfaktor ist.

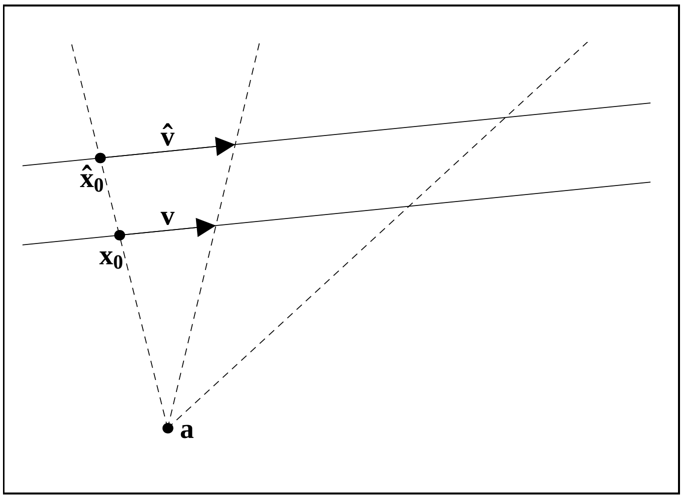

Abb. 3.2a: Durch Winkelmessungen nicht unterscheidbare Schiffstrajektorien.

Auch aus Entfernungsmessungen allein kann man weder x_0 nach v schätzen. Ist nämlich wieder a der Ortsvektor der Küstenstation und ist D eine beliebige Drehung (um den Nullpunkt), so lassen sich die Bahnen $x(t) = a + tv$ und $\widehat{x}(t) = \big(a + D(x_0 - a)\big) + t(Dv)$ nicht unterscheiden.

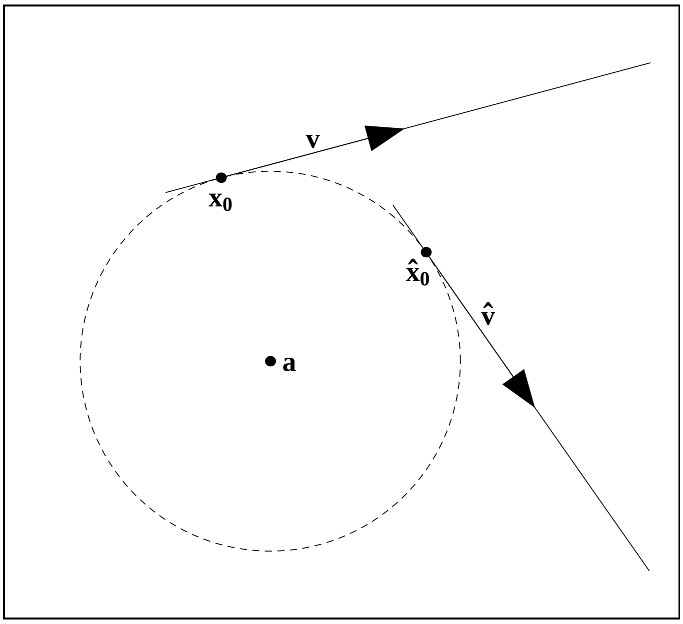

Abb. 3.2b: Durch Entfernungsmessungen nicht unterscheidbare Schiffstrajektorien.

Wie bereits beim Begriff der Steuerbarkeit ergibt sich eine besonders reichhaltige Theorie für lineare Systeme.

(3.3) Spezialfall. Wir betrachten ein lineares gesteuertes System $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t) + B(t)u(t)$ mit einer linearen Beobachtungsfunktion $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + \gamma(t)$ und schreiben kurz

$$(\star) \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Es sei $X(t, s)$ der Zustandsänderungsoperator des zugehörigen homogenen ungesteuerten Systems $\dot{x} = Ax$. Aus der Lösungsformel $x(t) = X(t, s)x(s) + \int_s^t X(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_s^t X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ folgt dann sofort die Gleichung

$$y(t) = C(t)X(t, s)x(s) + y_\star(t)$$

mit der Funktion $y_\star(t) := \int_s^t C(t)X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_s^t C(t)X(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + D(t)u(t) + \gamma(t)$. Da bei gegebener Steuerung u die Funktion $t \mapsto y_\star(t)$ nicht vom Anfangszustand $x(s)$ abhängt, sondern einfach eine bekannte Funktion ist, reduziert sich für ein System der Form $(\star)$ die Frage der Beobachtbarkeit auf die Frage, ob die Funktion $L : \mathbb{R}^n \to C([s, t], \mathbb{R}^m)$ mit

$$L(\xi)(\tau) := C(\tau)X(\tau, s)\xi$$

injektiv ist, was wegen der Linearität von L gleichbedeutend damit ist, daß $\mathrm{Kern}(L) = \{0\}$ gilt. Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz für die Funktion $H(\tau) := C(\tau)X(\tau, s)$.

(3.4) Hilfssatz. *Wir betrachten ein Zeitintervall* $[s,t]$ *und eine stetige Funktion* $H:[s,t]\to\mathbb{R}^m$, *definieren* $L:\mathbb{R}^n\to C([s,t],\mathbb{R}^m)$ *durch* $\big(L(\xi)\big)(\tau):=H(\tau)\xi$ *und setzen* $M(t,s):=\int_s^t H(\tau)^T H(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. *Dann gilt* $\operatorname{Kern}(L)=\operatorname{Kern}\big(M(s,t)\big)$.

Beweis. Genau dann liegt ξ im Kern von L, wenn $H(\tau)\xi=0$ bzw. $\|H(\tau)\xi\|^2=\xi^T H(\tau)^T H(\tau)\xi$ für alle $\tau\in[s,t]$ gilt, was wegen $\|H(\tau)\xi\|^2\geq 0$ genau dann der Fall ist, wenn

$$0 \;=\; \int_s^t \|H(\tau)\xi\|^2\mathrm{d}\tau \;=\; \xi^T M(s,t)\xi$$

gilt, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $M(s,t)\xi=0$ gilt, wenn also ξ im Kern von $M(s,t)$ liegt. ∎

(3.5) Satz. *Zwei Anfangszustände* ξ_1 *und* ξ_2 *des Systems*

$$\dot{x}=Ax+g+Bu,\quad y=Cx+Du+\gamma$$

sind genau dann nicht durch Messungen im Intervall $[s,t]$ *unterscheidbar, wenn* $\xi_2-\xi_1$ *im Kern der* **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$M(s,t) \;:=\; \int_s^t X(\tau,s)^T C(\tau)^T C(\tau) X(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau$$

liegt. Insbesondere ist das System genau dann beobachtbar, wenn $M(s,t)$ *invertierbar ist.*

Beweis. Die beiden verschiedenen Anfangszustände ξ_1 und ξ_2 liefern die Meßwerte $y_1(t)=C(t)X(t,s)\xi_1+y_\star(t)$ und $y_2(t)=C(t)X(t,s)\xi_2+y_\star(t)$ mit $y_\star(t)$ wie in (3.3). Genau dann sind also ξ_1 und ξ_2 nicht anhand der vorliegenden Messungen unterscheidbar, wenn $y_2(\tau)-y_1(\tau)=C(\tau)X(\tau,s)(\xi_2-\xi_1)$ für alle $\tau\in[s,t]$ gilt, wenn also mit $H:\xi\mapsto\big(\tau\mapsto C(\tau)X(\tau,s)\xi\big)$ der Vektor $\xi_2-\xi_1$ im Kern von H enthalten ist. Der Kern von H ist aber nach (3.4) gleich dem Kern von $M(s,t)$. ∎

Für den Fall eines linearen Systems mit *konstanten* Koeffizienten kann das Ergebnis expliziter formuliert werden.

(3.6) Satz. *Das lineare System*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ y(t)\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ u(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g(t)\\ \gamma(t)\end{bmatrix}$$

mit konstanten Matrizen $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ *und* $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$ *ist genau dann beobachtbar, wenn die Matrix*

$$\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$$

den (maximal möglichen) Rang n *hat.*

Beweis. Der Zustandsänderungsoperator ist gegeben durch $X(\tau,s)=e^{(\tau-s)A}$; die Beobachtbarkeitsmatrix ist daher gegeben durch $M(s,t)=e^{-sA^T}V(t,s)e^{-sA}$ mit

$$V(s,t) \;:=\; \int_s^t e^{\tau A^T}C^T C e^{\tau A}\mathrm{d}\tau.$$

Genau dann ist das betrachtete System beobachtbar, wenn $M(s,t)$ invertierbar ist, was offensichtlich genau dann der Fall ist, wenn $V(s,t)$ invertierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} v^T V(s,t) v \;&=\; \int_s^t v^T e^{\tau A^T}C^T C e^{\tau A} v\,\mathrm{d}\tau\\ &=\; \int_s^t \|Ce^{\tau A}v\|^2\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

ist $V(s,t)$ positiv semidefinit und invertierbar genau dann, wenn der einzige Vektor $v\in\mathbb{R}^n$, für den $Ce^{\tau A}v=0$ für alle $\tau\in[s,t]$ gilt, der Nullvektor ist. Für einen Vektor $v\in\mathbb{R}^n$ sind nun die folgenden Bedingungen äquivalent:

$$\begin{aligned} & Ce^{\tau A}v=0 \text{ für alle } \tau\in[s,t]\\ \Leftrightarrow\; & \textstyle\sum_{k=0}^\infty(\tau^k/k!)CA^k v=0 \text{ für alle } \tau\in[s,t]\\ \Leftrightarrow\; & CA^k v \text{ für alle } k\in\mathbb{N}_0\\ \Leftrightarrow\; & CA^k v \text{ für } 0\leq k\leq n-1 \text{ (Hamilton-Cayley!)}\\ \Leftrightarrow\; & \begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ C^{n-1}A\end{bmatrix} v=0. \end{aligned}$$

Genau dann ist also $V(s,t)$ invertierbar, wenn der einzige Vektor, der auf sämtlichen Zeilen der Matrix $[C^T \mid (CA)^T \mid \cdots \mid (C^{n-1}A)^T]^T$ senkrecht steht, der Nullvektor ist, was genau dann der Fall ist, wenn die Zeilen dieser Matrix ganz $(\mathbb{R}^n)^\star$ aufspannen, wenn diese Matrix also den maximal möglichen Rang n hat. ∎

(3.7) Bemerkung. Wie schon bei der Berechnung der Kalman-Matrix ist es nicht sinnvoll, die Potenzen von A zu berechnen, sondern die Rekursionsformel $CA^k=(CA^{k-1})A$ zu benutzen.

(3.8) Beispiel. Wir betrachten wieder das in (1.7) eingeführte Satellitenproblem. Wenn wir annehmen, daß sowohl der Abstand des Satelliten von der Erde als auch der Positionswinkel des Satelliten gemessen werden kann (durch Ermittlung der Laufzeit eines Signals bzw. durch Winkelmessungen von einer Bodenstation aus), so haben wir

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}1&0&0&0\\ 0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

und damit

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ 3\omega^2&0&0&2\omega\\ 0&0&0&1\\ 0&-2\omega&0&0\end{bmatrix} \quad\text{und } C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ 0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Dies liefert die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}.$$

Diese hat den Rang 4, so daß das System beobachtbar ist. Stehen uns nur Entfernungsmessungen zur Verfügung, so reduziert sich C auf $C_1 = (1,0,0,0)$, und wir erhalten die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A \\ C_1A^2 \\ C_1A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat nur noch den Rang 3, so daß aus Entferungsmessungen allein der Systemzustand nicht rekonstruiert werden kann. Stehen uns dagegen nur Winkelmessungen zur Verfügung, so reduziert sich C auf $C_2 = (0,0,1,0)$, und wir erhalten die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2A \\ C_2A^2 \\ C_2A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 4; der Systemzustand läßt sich also auch dann noch ermitteln, wenn nur Winkelmessungen möglich sind.

• **Weiteres Material:** Kapitel 134 im Buch ("Schätzung von System- und Meßparametern", Seiten 825-828).