2. Steuerbarkeit

(2.1) Definition. *Wir betrachten ein System $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$ mit $u \in \mathfrak{U}$, wobei $\mathfrak{U}$ eine vorgegebene Familie zulässiger Steuerungsfunktionen sei. Gegeben seien ferner zwei Zeiten $s < t$, ein vorgegebener Anfangszustand a und ein gewünschter Zielzustand z. Das System heißt* **steuerbar** *von dem Anfangszustand a in den Zielzustand z im Zeitintervall $[s,t]$, wenn es eine Steuerungsfunktion $u \in \mathfrak{U}$ derart gibt, daß die Lösung x_u des Anfangswertproblems*

$$\dot{x}(t) \;=\; f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad x(s) \;=\; a$$

die Bedingung $x_u(t) = z$ erfüllt. Wir nennen das System **vollständig steuerbar**, *wenn es zu je zwei Zuständen a und z und jeder Anfangszeit s eine Zeit t derart gibt, daß das System im Zeitintervall $[s,t]$ von a nach z gesteuert werden kann.*

(2.2) Spezialfall. Wir betrachten ein lineares gesteuertes System

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)x(t) + g(t) + B(t)u(t)$$

oder kurz $\dot{x} = Ax + g + Bu$. Es sei $X(t,s)$ der Zustandsänderungsoperator des zugehörigen homogenen ungesteuerten Systems $\dot{x} = Ax$. Multiplizieren wir die Gleichung $\dot{x} - Ax = g + Bu$ von links mit $X(s,t)$ durch, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(X(s,t)x(t)\Big) \;=\; X(s,t)g(t) + X(s,t)B(t)u(t),$$

nach Integration also $X(s,t)x(t) = x(s) + \int_s^t X(s,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_s^t X(s,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ bzw.

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; X(t,s)x(s) + \int_s^t X(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Es seien nun s eine gegebene Referenzzeit und $a = x(s)$ der Zustand des Systems zu dieser Zeit. Bezeichnen wir mit $\xi(t) := X(t,s)a + \int_s^t X(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ denjenigen Zustand, den das System aufgrund seiner Eigendynamik (ohne Eingriffe von außen) zur Zeit t erreichen würde, so stellt sich die Frage nach der Steuerbarkeit des Systems folgendermaßen: Gibt es zu einem vorgegebenen Zielzustand z eine Zeit t und eine Steuerungsfunktion $\tau \mapsto u(\tau)$ derart, daß die Gleichung

$$z - \xi(t) \;=\; \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

durch Wahl einer geeigneten Funktion erfüllt werden kann? Um diese Frage beantworten zu können, beweisen wir zunächst einen Hilfssatz.

(2.3) Hilfssatz. *Wir betrachten ein Zeitintervall $[s,t]$, eine stetige Funktion $G : [s,t] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sowie einen Raum $\mathfrak{U}$ von Steuerungsfunktionen, der alle stückweise stetigen Funktionen $u : [s,t] \to \mathbb{R}^m$ enthält. Wir betrachten die linearen Abbildungen $L(s,t) : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ und $W(s,t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die definiert sind durch*

$$\begin{aligned} L(s,t)[u] \;&:=\; \int_s^t G(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \textit{und} \\ W(s,t) \;&:=\; \int_s^t G(\tau)G(\tau)^T\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathrm{Bild}\big(L(s,t)\big) = \mathrm{Bild}\big(W(s,t)\big)$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Inklusion $\supseteq$ und betrachten dazu ein beliebiges Element $\eta \in \mathrm{Bild}\big(W(s,t)\big)$, sagen wir $\eta = W(s,t)\xi$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Für $u(\tau) := G(\tau)^T\xi \in \mathfrak{U}$ gilt dann

$$L(s,t)[u] \;=\; \int_s^t G(\tau)G(\tau)^T\xi\,\mathrm{d}\tau \;=\; W(s,t)\xi \;=\; \eta.$$

Also gilt $\eta \in \mathrm{Bild}\big(L(s,t)\big)$. Anschließend beweisen wir die umgekehrte Inklusion $\subseteq$ und betrachten dazu ein beliebiges Element $\eta \in \mathrm{Bild}\big(L(s,t)\big)$, sagen wir $\eta = \int_s^t G(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $u \in \mathfrak{U}$. Ferner sei ξ ein beliebiges Element im Kern von $W(s,t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \xi^T 0 \;=\; \xi^T\big(W(s,t)\xi\big) \;&=\; \xi^T\left(\int_s^t G(\tau)G(\tau)^T\xi\,\mathrm{d}\tau\right) \\ =\; \int_s^t \big(\xi^T G(\tau)G(\tau)^T\xi\big)\,\mathrm{d}\tau \;&=\; \int_s^t \|G(\tau)^T\xi\|^2\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

und damit $G(\tau)^T\xi \equiv 0$ (denn eine nichtnegative stetige Funktion, deren Integral verschwindet, muß identisch Null sein). Hieraus folgt dann

$$\langle \xi, \eta\rangle = \xi^T\eta = \int_s^t \xi^T G(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t 0^T u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;=\; 0.$$

Für alle $\xi \in \mathrm{Kern}\big(W(s,t)\big)$ gilt also $\langle \eta, \xi\rangle = 0$. Das bedeutet $\eta \in \mathrm{Kern}\big(W(s,t)\big)^\perp = \mathrm{Bild}\big(W(s,t)^T\big) = \mathrm{Bild}\big(W(s,t)\big)$. Da $\eta \in \mathrm{Bild}\big(L(s,t)\big)$ beliebig war, ist damit die Inklusion $\subseteq$ gezeigt. ■

(2.4) Satz. *Das System $\dot{x} = Ax + g + Bu$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn für alle $s < t$ die* **Steuerbarkeitsmatrix**

$$W(s,t) \;:=\; \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T\mathrm{d}\tau$$

invertierbar ist. Eine Steuerung, die den Anfangszustand $a = x(s)$ in den Zielzustand $z = x(t)$ überführt, ist mit $\xi(t) := X(t,s)a + \int_s^t X(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ gegeben durch

$$(\star) \qquad u(\tau) \;:=\; B(\tau)^T X(t,\tau)^T W(s,t)^{-1}\big(z - \xi(t)\big).$$

Für jede andere stückweise stetige Steuerung, die den Anfangszustand $a = x(s)$ in den Zielzustand $z = x(t)$ überführt, gilt

$$\int_s^t \|v(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau \;>\; \int_s^t \|u(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau.$$

Die Steuerung $(\star)$ ist also dadurch charakterisiert, daß sie in einem gewissen Sinn den Steuerungsaufwand minimiert.

Beweis. Wie in (2.2) gezeigt, überführt die Steuerung u den Anfangszustand $x(s) = a$ in den Zielzustand $z = x(t)$ genau dann, wenn

$$z - \xi(t) \;=\; \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

gilt, also $z - \xi(t) = L(s,t)[u] = \int_s^t G(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $G(\tau) := X(t,\tau)B(\tau)$. Dies ist genau dann für alle z möglich, wenn $L(s,t)$ surjektiv ist, was nach (2.3) genau dann der Fall ist, wenn $W(s,t)$ surjektiv und damit sogar bijektiv ist. Daß die Steuerung $(\star)$ die gewünschte Zustandsänderung herbeiführt, sieht man sofort durch Einsetzen wie im Beweis von (2.3). Nur die angegebene Optimalitätseigenschaft der Steuerung $(\star)$ ist zu zeigen.

Es sei v irgendeine andere Steuerung, die die gleiche Zustandsänderung bewirkt. Dann gilt

$$0 \;=\; \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)\big(v(\tau) - u(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Abbildung $\big(z - \xi(t)\big)^T W(s,t)^{T-1}$ an, so ergibt sich gemäß der Definition $(\star)$ der Steuerung u die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; -\int_s^t u(\tau)^T\big(v(\tau) - u(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \\ &=\; \int_s^t u^T(u-v) \;=\; \int_s^t \|u\|^2 - \int_s^t u^T v \end{aligned}$$

und damit $\int_s^t v^T u = \int_s^t u^T v = \int_s^T \|u\|^2$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \int_s^t \|u-v\|^2 &= \int_s^t (u-v)^T(u-v) \;=\; -\int_s^t v^T(u-v) \\ =\; -\int_s^t v^T u + \int_s^t v^T v \;&=\; -\int_s^t \|u\|^2 + \int_s^t \|v\|^2 \end{aligned}$$

und daher $\int_s^t \|v\|^2 = \int_s^t \|u\|^2 + \int_s^t \|u-v\|^2 \geq \int_s^t \|u\|^2$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\int_s^t \|u-v\|^2 = 0$ gilt, also $v = u$. ■

Für den Fall eines linearen Systems mit *konstanten* Koeffizienten kann das Ergebnis expliziter formuliert werden.

(2.5) Satz. *Das lineare System $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t) + Bu(t)$ mit konstanten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die* **Kalman-Matrix** $K := [B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times(nm)}$ *den Rang n hat (***Kalman-Kriterium***).*

Beweis. Der Zustandsänderungsoperator ist gegeben durch $X(t,\tau) = e^{(t-\tau)A}$; die Steuerbarkeitsmatrix ist daher gegeben durch $W(s,t) = e^{tA}U(t,s)e^{-tA^T}$ mit

$$U(s,t) \;:=\; \int_s^t e^{-\tau A}BB^T e^{-\tau A^T}\mathrm{d}\tau.$$

Genau dann ist das betrachtete System vollständig steuerbar, wenn $W(s,t)$ invertierbar ist, was offensichtlich genau dann der Fall ist, wenn $U(s,t)$ invertierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} v^T U(s,t)v \;&=\; \int_s^t v^T e^{-\tau A}BB^T e^{-\tau A^T} v\,\mathrm{d}\tau \\ &=\; \int_s^t \|B^T e^{-\tau A^T} v\|^2 \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

ist $U(s,t)$ positiv semidefinit und invertierbar genau dann, wenn der einzige Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, für den $B^T e^{-\tau A^T} v = 0$ bzw. $v^T e^{-\tau A}B = 0$ für alle $\tau \in [s,t]$ gilt, der Nullvektor ist. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sind nun die folgenden Bedingungen äquivalent:

$$\begin{aligned} & v^T e^{-\tau A}B = 0 \text{ für alle } \tau \in [x,t] \\ \Leftrightarrow\; & \textstyle\sum_{k=0}^\infty \big((-\tau)^k/k!\big)v^T A^k B = 0 \text{ für alle } \tau \in [s,t] \\ \Leftrightarrow\; & v^T A^k B \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow\; & v^T A^k B \text{ für } 0 \leq k \leq n-1 \text{ (Hamilton-Cayley!)} \\ \Leftrightarrow\; & v^T(B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B) = 0. \end{aligned}$$

Genau dann ist also $U(s,t)$ invertierbar, wenn der einzige Vektor, der auf sämtlichen Spalten der Kalman-Matrix K senkrecht steht, der Nullvektor ist, was genau dann der Fall ist, wenn die Spalten von K ganz $\mathbb{R}^n$ aufspannen, wenn also K den maximal möglichen Rang n hat. ■

(2.6) Bemerkung. Zur Berechnung der Kalman-Matrix benutzt man zweckmäßigerweise nicht die Potenzen von A, sondern berechnet sukzessive die Matrizen A^kB gemäß der Iterationsvorschrift $A^kB = A(A^{k-1}B)$. Nach dem Satz von Hamilton und Cayley gilt

$$\mathrm{rk}\,(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B) \;=\; \mathrm{rk}\,(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{N-1}B)$$

für jede Zahl $N > n$; der Rang der Kalman-Matrix ändert sich also nicht mehr, wenn man rechts höhere Potenzen von A ergänzt. Die Kalman-Matrix ist nach dem Mathematiker Rudolf Emil Kalman (*1930) benannt, der maßgeblich zur Herausbildung der mathematischen Kontrolltheorie als eigenständiger Disziplin beigetragen hat.

(2.7) Beispiel. Wir betrachten das in (1.7) behandelte Satellitenproblem. Wir haben

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten daher die Kalman-Matrix $K = (B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B)$ mit

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese hat den Rang 4, so daß das System vollständig steuerbar ist. (Jeder Zustand nahe beim Referenzzustand, um den linearisiert wurde, läßt sich also durch ein kleines Bahnmanöver ansteuern.) Interessant ist auch die Frage, ob das System immer noch vollständig steuerbar ist, wenn nur Manöver entweder in radialer oder aber in tangentialer Richtung möglich sind. Ist $u_2 = 0$, so reduziert sich B auf die Matrix $B_1 := (0,1,0,0)^T$, und wir erhalten die Kalman-Matrix $K_1 = (B_1 \mid AB_1 \mid A^2B_1 \mid A^3B_1)$ mit

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat nur den Rang 3; allein mit Radialmanövern läßt sich also nicht jeder Zustand ansteuern. Ist dagegen $u_1 = 0$, so reduziert sich B auf die Matrix $B_2 := (0,0,0,1)^T$, und wir erhalten die Kalman-Matrix $K_2 = (B_2 \mid AB_2 \mid A^2B_2 \mid A^3B_2)$ mit

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese hat immer noch den Rang 4, so daß das System auch dann noch vollständig steuerbar ist, wenn nur Schub in Tangentialrichtung aufgebracht werden kann.

(2.8) Beispiel. Wir betrachten das in (1.2) betrachtete schwingende System. Nach dem Kalman-Kriterium ist dieses System genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix $(B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B)$ den Rang 4 hat. Da B bis auf einen von Null verschiedenen Skalarfaktor gleich $e_4 = (0,0,0,1)^T$ ist, ist dies genau dann der Fall, wenn die Matrix $(e_4 \mid Ae_4 \mid A^2e_4 \mid A^3e_4)$ den Rang 4 hat. Diese Matrix ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & d_2/m_1 & \alpha \\ 0 & 1 & -d_2/m_2 & \beta \\ 0 & d_2/m_1 & \alpha & \gamma \\ 1 & -d_2/m_2 & \beta & \delta \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k_2}{m_1} - \frac{(d_1+d_2)d_2}{m_1^2} - \frac{d_2^2}{m_1m_2}, \\ \beta &= -\frac{k_2}{m_2} + \frac{d_2^2}{m_1m_2} + \frac{d_2^2}{m_2^2}, \\ \gamma &= -\frac{k_1d_2+k_2d_1+2k_2d_2}{m_1^2} - \frac{2k_2d_2}{m_1m_2} + \frac{(d_1+d_2)^2d_2}{m_1^3} \\ &\quad + \frac{(d_1+2d_2)d_2^2}{m_1^2m_2} + \frac{d_2^3}{m_1m_2^2}, \\ \delta &= \frac{2k_2d_2}{m_1m_2} + \frac{2k_2d_2}{m_2^2} - \frac{(d_1+d_2)d_2^2}{m_1^2m_2} - \frac{2d_2^3}{m_1m_2^2} - \frac{d_2^3}{m_2^3}. \end{aligned}$$

Das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Determinante dieser letzten Matrix von Null verschieden ist.

Der folgende Satz zeigt, daß sich ein zeitinvariantes lineares System zerlegen läßt in einen vollständig steuerbaren Anteil und einen Anteil, der durch die verfügbaren Steuerungen nicht beeinflußt werden kann.

(2.9) Satz. *Wir betrachten ein lineares gesteuertes System*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t) + Bu(t)$$

mit konstanten Koeffizienten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Die Kalman-Matrix $K = [B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^nB]$ habe den Rang r, und es seien $v_1,\ldots,v_r$ linear unabhängige Spalten von K. Ergänze diese irgendwie zu einer Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ und setze $P := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)^{-1}$. Wir setzen $\widehat{A} := PAP^{-1}$ und $\widehat{B} := PB$ und führen die lineare Koordinatentransformation $y := Px$ durch. Das gegebene System geht dann über in ein System der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

mit $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}$, dessen erste Komponente vollständig steuerbar ist (während in der zweiten Komponente $\dot{y}_2(t) = A_{22}y_2(t) + \gamma_2(t)$ die Steuerfunktion u überhaupt nicht auftritt, also die Systementwicklung auch nicht beeinflussen kann).

Beweis. Durchmultiplizieren der Gleichung $\dot{x} = Ax+g+Bu$ mit P von links ergibt $P\dot{x} = PAx+Pg+PBu$. Mit $y := Px$ und $\gamma := Pg$ bedeutet dies $\dot{y} = PAP^{-1}y + \gamma + PBu = \dot{y} = \widehat{A}y + \gamma + \widehat{B}u$. Wir zeigen nun, daß die auftretenden Matrizen $\widehat{P}$ und $\widehat{B}$ die angegebene Blockform haben.

Zunächst gilt $P(v_1,\ldots,v_n) = \mathbf{1}$, also $(Pv_1 \mid \cdots \mid Pv_n) = (e_1 \mid \cdots \mid e_n)$ und damit $Pv_i = e_i$ für $1 \le i \le n$. Für $1 \le i \le r$ ist nun der Vektor Av_i eine Spalte der Matrix $AK = (AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n+1}B)$ und damit eine Linearkombination der Vektoren $v_1,\ldots,v_r$; folglich ist PAv_i eine Linearkombination der Vektoren $Pv_1 = e_1,\ldots,Pv_r = e_r$. Daher gilt

$$\widehat{A} = PAP^{-1} = P(Av_1 \mid \cdots \mid Av_n) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

mit einer $(r \times r)$-Matrix A_{11}. Da B eine Teilmatrix von K ist, ist auch jede Spalte von B eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_r$, folglich jede Spalte von PB eine Linearkombination von $Pv_1 = e_1, \ldots, Pv_r = e_r$. Also gilt

$$\widehat{B} \; = \; PB \; = \; \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit einer $(r \times m)$-Matrix B_1. Wegen

$$\begin{aligned} r \; &= \; \operatorname{rk}(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B) \\ &= \; \operatorname{rk}(\widehat{B} \mid \widehat{A}\widehat{B} \mid \cdots \mid \widehat{A}^{n+1}\widehat{B}) \\ &= \; \operatorname{rk} \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \; \operatorname{rk}(B_1 \mid A_{11}B_1 \mid \cdots \mid A_{11}^{n-1}B_1) \\ &= \; \operatorname{rk}(B_1 \mid A_{11}B_1 \mid \cdots \mid A_{11}^{r-1}B_1) \end{aligned}$$

ist das obere Teilsystem vollständig steuerbar. ■