1. Gesteuerte Systeme

(1.1) Definition. *Ein* **gesteuertes System** *ist gegeben durch eine Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) \;=\; f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

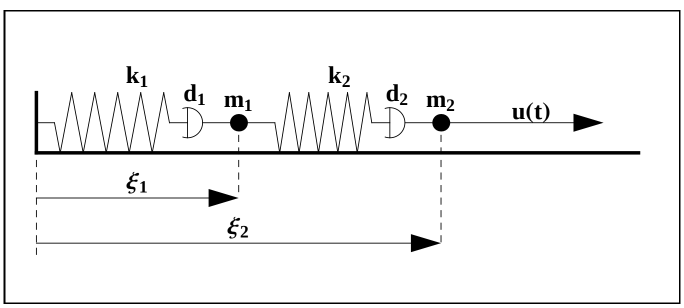
mit einer **Steuerungsfunktion** u*, die Eingriffe von außen in das System modelliert.*

Wir deuten t als Zeit, $x(t)$ als den Zustand des Systems zur Zeit t sowie $u(t)$ als den Wert der Einflußgröße, mit der wir zur Zeit t in das System eingreifen. Sobald die Funktion $t \mapsto u(t)$ gewählt ist, liegt eine nichtautonome gewöhnliche Differentialgleichung vor, nämlich

$$\dot{x}(t) \;=\; g\big(t, x(t)\big) \qquad \text{mit} \qquad g(t,x) := f\big(t, x, u(t)\big).$$

In der Kontrolltheorie geht es aber gerade darum, die Steuerungsfunktion u aus einer vorgegebenen Klasse $\mathfrak{U}$ zulässiger Funktionen geeignet zu wählen, damit sich das System in gewünschter Weise entwickelt.

(1.2) Beispiel. Zwei Massen $m_1, m_2 > 0$ seien wie skizziert durch zwei Federn (Federkonstanten $k_1, k_2 > 0$) und zwei Dämpfer (Dämpfungskonstanten $d_1, d_2 \geq 0$) verbunden. Durch eine zeitlich veränderliche Kraft u kann von außen in das System eingegriffen werden; zum Beispiel könnte die Aufgabe darin bestehen, das schwingende System "anzuhalten" und in eine Gleichgewichtslage zu überführen.



Aus dem Newtonschen Grundgesetz ergeben sich (unter Annahme des Hookeschen Gesetzes und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung) die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\xi}_1 &= -d_1\dot{\xi}_1 + d_2(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) - k_1(\xi_1 - \ell_1) + k_2(\xi_2 - \xi_1 - \ell_2), \\ m_2\ddot{\xi}_2 &= -d_2(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) - k_2(\xi_2 - \xi_1 - \ell_2) + u, \end{aligned}$$

wobei ℓ_1 und ℓ_2 die ungedehnten ("natürlichen") Längen der beiden Federn seien. Da es physikalisch sinnvoll ist, die Positionen der beiden Massen von den Gleichgewichtslagen der Federn aus anzugeben, führen wir die Variablen

$$x_1 := \xi_1 - \ell_1 \quad \text{und} \quad x_2 := \xi_2 - \ell_2 - \ell_1$$

ein, mit denen die Bewegungsgleichungen übergehen in

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(d_1+d_2)\dot{x}_1 + d_2\dot{x}_2 - (k_1+k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2\ddot{x}_2 &= -d_2\dot{x}_2 + d_2\dot{x}_1 - k_2x_2 + k_2x_1 + u. \end{aligned}$$

Mit den Geschwindigkeiten $x_3 := \dot{x}_1 = \dot{\xi}_1$ und $x_4 := \dot{x}_2 = \dot{\xi}_2$ gehen diese Bewegungsgleichungen über in das System $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_1+k_2}{-m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{d_1+d_2}{-m_1} & \dfrac{d_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{d_2}{m_2} & -\dfrac{d_2}{m_2} \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix}.$$

(1.3) Beispiel. Statt der Dämpfer möge für jede der Massen eine geschwindigkeitsproportionale Reibung am Boden wirken. In dieser Situation sind die Dämpfungskräfte proportional zu den absoluten (nicht den relativen) Geschwindigkeiten der beteiligten Massen. Aus dem Newtonschen Grundgesetz ergeben sich (unter Annahme des Hookeschen Gesetzes und geschwindigkeitsproportionaler Reibung) die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\xi}_1 &= -d_1\dot{\xi}_1 - d_2\dot{\xi}_1 - k_1(\xi_1 - \ell_1) + k_2(\xi_2 - \xi_1 - \ell_2), \\ m_2\ddot{\xi}_2 &= -d_2\dot{\xi}_2 - k_2(\xi_2 - \xi_1 - \ell_2) + u, \end{aligned}$$

wobei ℓ_1 und ℓ_2 die ungedehnten ("natürlichen") Längen der beiden Federn seien. Führen wir wie in (1.2) die Variablen $x_1 := \xi_1 - \ell_1$, $x_2 := \xi_2 - \ell_2 - \ell_1$, $x_3 := \dot{\xi}_1$ und $x_4 := \dot{\xi}_2$ ein, so gehen die Bewegungsgleichungen über in das System $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

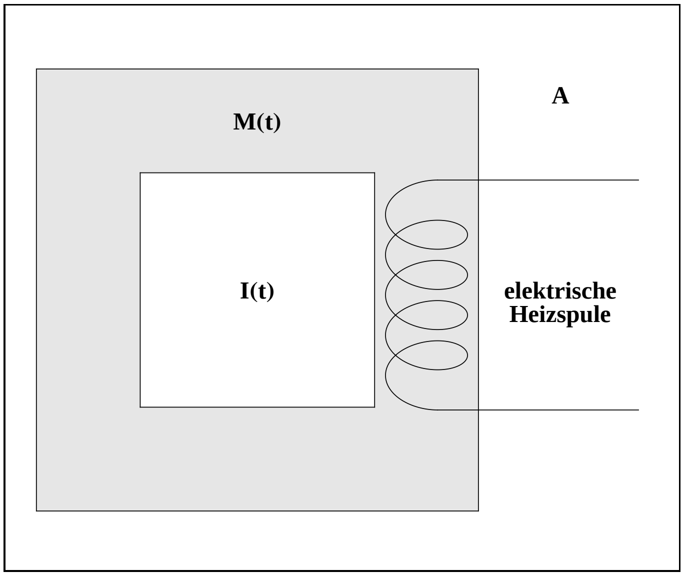
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_1+k_2}{-m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{d_1+d_2}{-m_1} & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{d_2}{m_2} \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix}.$$

(1.4) Beispiel. Ein Ofen soll durch eine elektrische Heizspirale in der Ofenwand beheizt werden. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- c_i, c_m : spezifische Wärmekapazität des Ofeninnern bzw. der Ofenwand;
- f_i, f_a : Innen- bzw. Außenfläche der Ofenwand;
- r_i, r_a : Strahlungskoeffizienten der Innen- bzw. der Außenfläche der Ofenwand.

Wir machen nun die vereinfachende Annahme, daß der Wärmeaustausch instantan erfolgt und sich jeweils sofort eine gleichmäßige Temperaturverteilung im Innern und in der Ofenwand herausbildet. Wir nehmen ferner an, daß die von der Ofenwand nach außen abgegebene Wärme vernachlässigbar und die Heizspule ideal isoliert ist, so daß die Außentemperatur A als konstant angenommen werden darf. Bezeichnen wir mit $t \mapsto I(t)$ die Innen- und mit $t \mapsto M(t)$ die Manteltemperatur des Ofens, so gelten unter diesen Annahmen die folgenden Bilanzgleichungen:

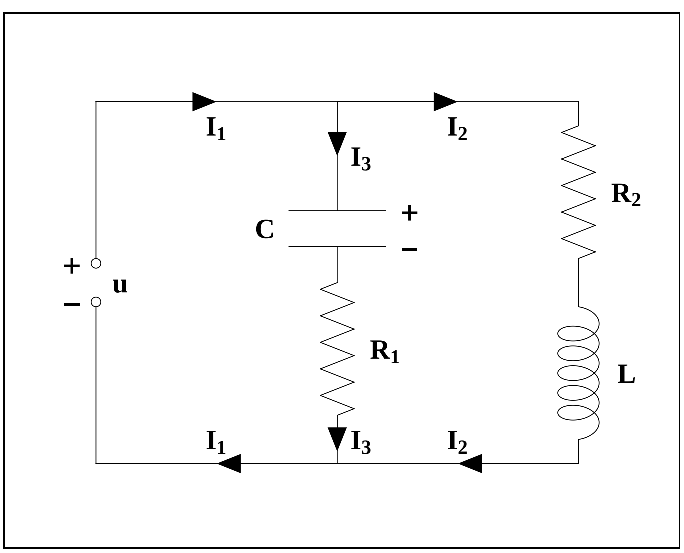
$$\begin{aligned} c_m \dot{M} &= -f_a r_a (M - A) - f_i r_i (M - I) + u, \\ c_i \dot{I} &= f_i r_i (M - I). \end{aligned}$$



Mit $x_1 := M - A$ und $x_2 := I - A$ kann man dieses System schreiben in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(f_a r_a + g_i r_i)/c_m & f_i r_i / c_m \\ f_i r_i / c_i & -f_i r_i / c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/c_m \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

(1.5) Beispiel. Der abgebildete Schaltkreis enthält zwei Widerstände R_1 und R_2, eine Spule der Induktivität L sowie einen Kondensator der Kapazität C. Die (zeitlich veränderliche) Spannung u dient als Steuerungsvariable.



Eingezeichnet sind die in den einzelnen Teilen des Schaltkreises fließenden Ströme I_1, I_2 und I_3 (wobei wir der Konvention folgen, die Stromrichtung von + nach − als positiv anzusehen). Nach der Kirchhoffschen Knotenregel gilt dann $I_1 = I_2 + I_3$. Ist Q die im Kondensator gespeicherte Ladung, so gilt $I_3 = \dot{Q}$. Bezeichnet weiter $U_\bullet$ den Spannungsabfall an der Stelle $\bullet$, so gelten die folgenden Gleichungen:

- $U_{R_1} = R_1 I_3$, $U_{R_2} = R_2 I_2$ (Ohmsches Gesetz);
- $U_L = L \dot{I}_2$ (Induktionsgesetz);
- $U_C = Q/C$ (Kondensatorgesetz).

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel erhalten wir $U_C + U_{R_1} - u = 0$ und $U_{R_2} + U_L - U_{R_1} - U_C = 0$, also $u = U_C + U_{R_1} = U_{R_2} + U_L$ und damit einerseits

$$(1) \quad u = U_C + R_1 I_3 = U_C + R_1 \dot{Q} = U_C + R_1 C \dot{U}_C,$$

andererseits

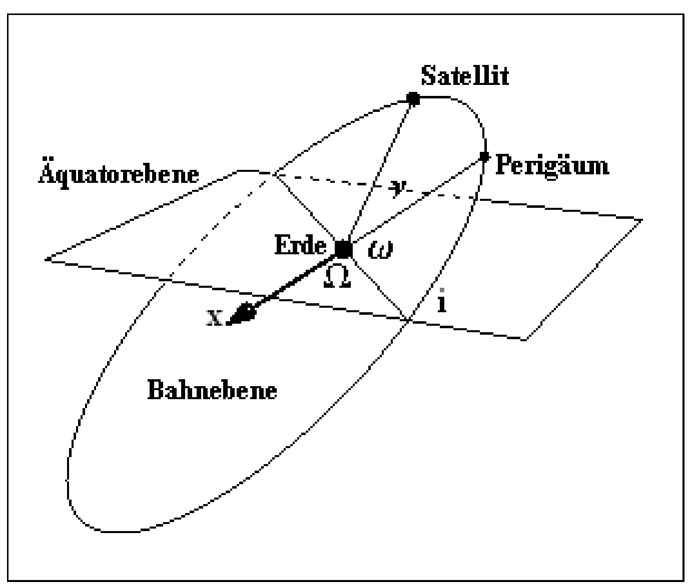
$$(2) \quad u = U_{R_2} + U_L = R_2 I_2 + L \dot{I}_2.$$

Führen wir $x_1 := U_C$ und $x_2 := I_2$ als Zustandsvariablen ein, so lassen sich die Gleichungen (1) und (2) folgendermaßen als gesteuertes System schreiben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(R_1 C) & 0 \\ 0 & -R_2/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/(R_1 C) \\ 1/L \end{bmatrix} u.$$

(1.6) Beispiel. Die Bewegung eines Körpers (etwa eines Satelliten) um einen gravitierenden Zentralkörper (etwa die Erde) in ungestörter Keplerbewegung vollzieht sich auf einer Ellipse. Als Bewegungsparameter können die klassischen Keplerelemente gewählt werden:

$$\begin{aligned} a &= \text{große Halbachse der Bahnellipse,} \\ e &= \text{Exzentrizität der Bahnellipse,} \\ i &= \text{Inklination der Bahnebene,} \\ \Omega &= \text{Rektaszension des aufsteigenden Knotens,} \\ \omega &= \text{Perigäumsargument,} \\ \nu &= \text{wahre Anomalie.} \end{aligned}$$



Als Referenzebene wählt man im Fall eines die Erde umkreisenden Satelliten typischerweise die Äquatorebene der Erde (zu einem fest gewählten Zeitpunkt) als xy-Ebene, wobei die x-Richtung die Richtung des Frühjahrsäquinoktiums angibt. Die Parameter a und e drücken die geometrische Form der Satellitenbahn aus, die Winkel i und Ω beschreiben die Lage der Bahnebene gegenüber der Referenzebene (wobei der aufsteigende Knoten derjenige Punkt ist, an der der Satellit in Aufwärtsbewegung die Referenzebene überquert), und der Winkel ω gibt an, wo das Perigäum (also der erdnächste Punkt des Satelliten auf dessen Bahn) liegt. Bei einer ungestörten Keplerbewegung sind a, e, i, Ω, ω konstant; nur ν ist eine Funktion der Zeit und beschreibt die Bewegung des Satelliten entlang seiner Ellipsenbahn. Der Ortsvektor (x, y, z) des Satelliten im Referenzsystem ist gegeben durch

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}\begin{bmatrix}\cos(\Omega)\cos(\omega+\nu)-\sin(\Omega)\sin(\omega+\nu)\cos(i)\\ \sin(\Omega)\cos(\omega+\nu)+\cos(\Omega)\sin(\omega+\nu)\cos(i)\\ \sin(\omega+\nu)\sin(i)\end{bmatrix},$$

wobei $t \mapsto \nu(t)$ der **Keplergleichung**

$$\dot\nu = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}\,(1+e\cos\nu)^2}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{\sqrt{\mu}\cdot(1+e\cos\nu)}{\big(a(1-e^2)\big)^{3/2}}$$

genügt. Dabei ist μ die Gravitationskonstante des Zentralkörpers. Fällt die Bahnebene mit der Referenzebene zusammen, so ist $i = 0$; in diesem Fall ist Ω nicht mehr eindeutig bestimmt, und wir können o.B.d.A. $\Omega = 0$ setzen. Die Ellipsenbahn ist dann in Parameterform gegeben durch

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}\begin{bmatrix}\cos(\omega+\nu)\\ \sin(\omega+\nu)\end{bmatrix}.$$

Ist $e = 0$, so liegt eine Kreisbahn vor; in diesem Fall ist ω nicht mehr eindeutig bestimmt, und wir können o.B.d.A. $\omega = 0$ setzen. In diesem Fall reduziert sich die Keplergleichung auf $\dot\nu = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$ mit der Lösung $\nu(t) = \nu_0 + t\cdot\sqrt{\mu}/a^{3/2}$, und die Bahngleichung nimmt die Form

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}\cos(\nu)\\ \sin(\nu)\end{bmatrix}$$

an. Bis jetzt handelt es sich um ein ungesteuertes dynamisches System. Steuerungen von außen treten auf, wenn durch das Zünden von Triebwerken die Bahn des Satelliten geändert wird. Dazu betrachten wir als nächstes Beispiel nur den einfachsten denkbaren Fall.

(1.7) Beispiel. Wir betrachten die in (1.6) am Ende gefundene Lösung $x = a\cos(\nu)$, $y = a\sin(\nu)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega := \dot\nu = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$, also $\mu = \omega^2 a^3$. Wir wollen um diese Lösung "linearisieren", also Lösungen der Form $r(t) = a + (\delta r)(t)$ und $\nu(t) = \omega t + (\delta\nu)(t)$ mit "kleinen" Abweichungen δr und $\delta\nu$ untersuchen, die sich durch "kleine" Eingriffe von außen (Schub u_1 in Radialrichtung und Schub u_2 in Tangentialrichtung) bewirken lassen. Wir untersuchen also nicht "große" Bahnmanöver, die den Satelliten auf eine grundlegend andere Bahn zwingen, sondern nur kleine Korrekturmanöver, um Abweichungen von der Nominalbahn aufgrund nicht modellierter Effekte auszugleichen ("spacecraft station keeping"). Dazu schreiben wir die Bewegungsgleichung ("Masse mal Beschleunigung = wirkende Kraft") in einem Zentralkraftfeld in Polarkoordinaten auf:

$$\begin{aligned} & m(\ddot r - r\dot\nu^2)\begin{bmatrix}\cos\nu\\ \sin\nu\end{bmatrix} + m(2\dot r\dot\nu + r\ddot\nu)\begin{bmatrix}-\sin\nu\\ \cos\nu\end{bmatrix} \\ = {} & \frac{-\mu}{r^2}\begin{bmatrix}\cos\nu\\ \sin\nu\end{bmatrix} + u_1\begin{bmatrix}\cos\nu\\ \sin\nu\end{bmatrix} + u_2\begin{bmatrix}-\sin\nu\\ \cos\nu\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Aufspalten in Radial- und Tangentialkomponente liefert (wenn wir noch die Satellitenmasse auf den Wert $m = 1$ normieren) die Gleichungen

$$\ddot r = r\dot\nu^2 - \frac{\mu}{r^2} + u_1 \quad \text{und} \quad \ddot\nu = \frac{-2\dot r\dot\nu}{r} + \frac{u_2}{r}.$$

Wir schreiben nun $r = a + \delta r$ sowie $\nu = \omega t + \delta\nu$ und erhalten durch konsequentes Linearisieren die Gleichungen

$$\begin{aligned}(\delta r)^{\cdot\cdot} &= \ddot r = r\dot\nu^2 - \frac{\mu}{r^2} + u_1\\ &= (a+\delta r)\big(\omega + (\delta\nu)^{\cdot}\big)^2 - \frac{\mu}{(a+\delta r)^2} + u_1\\ &\approx (a+\delta r)\big(\omega^2 + 2\omega(\delta\nu)^{\cdot}\big) - \frac{\mu}{a^2}\left(1 - \frac{\delta r}{a}\right)^2 + u_1\\ &\approx a\omega^2 + \omega^2\delta r + 2a\omega(\delta\nu)^{\cdot} - \frac{\mu}{a^2}\left(1 - \frac{2\delta r}{a}\right) + u_1\\ &= 3\omega^2\delta r + 2a\omega(\delta\nu)^{\cdot} + u_1\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(\delta\nu)^{\cdot\cdot} &= \ddot\nu = -\frac{2\dot r\dot\nu}{r} + \frac{u_2}{r}\\ &= -\frac{2(\delta r)^{\cdot}\big(\omega + (\delta\nu)^{\cdot}\big)}{a+\delta r} + \frac{u_2}{a+\delta r}\\ &\approx \frac{-2\omega(\delta r)^{\cdot}}{a}\left(1 - \frac{\delta r}{a}\right) + \frac{u_2}{a}\left(1 - \frac{\delta r}{a}\right)\\ &= -\frac{2\omega}{a}(\delta r)^{\cdot} + \frac{u_2}{a}.\end{aligned}$$

Mit $x_1 := \delta r$, $x_2 := \dot x_1$, $x_3 := a\,\delta\nu$ und $x_4 := \dot x_3$ erhalten wir also das linearisierte gesteuerte System

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2\omega & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

(1.8) Beispiel. Wir betrachten die Menschenpopulation $M(t)$ und die Vampirpopulation $V(t)$ in einer isolierten Gegend Transsylvaniens. Wir bezeichnen mit a die natürliche Wachstumsrate der Menschenpopulation und mit b die natürliche Abnahmerate der Vampirpopulation (aufgrund von Kontakten mit Sonnenlicht, Kruzifixen, Knoblauch und Vampirjägern); ferner sei $c(t)$ die (als zeitlich variable angenommene) Konsumtionsrate (Anzahl konsumierter Menschen pro Vampir pro Zeiteinheit). Es gelten dann die Differentialgleichungen

$$\dot{M}(t) = aM(t) - c(t)V(t), \quad \dot{V}(t) = -bV(t) + c(t)V(t),$$

die wir kurz in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{M} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ V \end{bmatrix}$$

schreiben können. Gegeben sei nun eine Nutzenfunktion $c \mapsto U[c]$ ("utility function"), die angibt, wie stark ein Vampir von dem Konsumtionswert c profitiert. Das Ziel der Vampire könnte es sein, den langfristigen Nutzen

$$\int_0^\infty e^{-rt} U\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

zu maximieren (wobei r eine Diskontrate ist, die den Nutzen um so schwächer gewichtet, je weiter dieser in der Zukunft liegt). Dies ist ein Problem in der Theorie der Optimalsteuerungen: Wähle (bei gegebener Nutzenfunktion U) die Konsumtionsrate $t \mapsto c(t)$ so, daß das Integral $\int_0^\infty e^{-rt} U\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t$ unter der Nebenbedingung maximiert wird, daß die zugehörige Lösung der Differentialgleichung $(\star)$ die Bedingungen $M > 0$ und $V > 0$ erfüllt.

(1.9) Beispiel. Eine Insektenpopulation $t \mapsto x(t)$ wachse mit der natürlichen Wachstumsrate $a > 0$. Diese Population werde durch ein Insektizid bekämpft. Nehmen wir vereinfachend an, daß die Zahl der in einem Zeitintervall $[t, t + \mathrm{d}t]$ getöteten Insekten sowohl proportional zur Zeitdauer $\mathrm{d}t$ als auch zur Abgaberate $u(t)$ ist (definiert als versprühte Insektizidmenge pro Zeiteinheit), also proportional zur Gesamtmenge des während des Zeitintervalls versprühten Insektizids, so erhalten wir die Systemgleichung

$$\dot{x}(t) \;=\; ax(t) - u(t).$$

Ausgehend von einer Populationsgröße $x(0) = x_0$ kann das Ziel nun sein, zu einer vorgegebenen Zeit $T > 0$ (etwa zur Zeit der nächsten Apfelblüte) alle Insekten zu töten, also die Funktion $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ so zu wählen, daß $x(T) = 0$ gilt. Dafür gibt es natürlich viele Wahlmöglichkeiten. Wir können nun versuchen, die Funktion u in irgendeinem Sinne "optimal" zu wählen, beispielsweise dadurch, daß wir die Beeinträchtigung der Umwelt durch das Insektizid minimieren. Wird diese Beeinträchtigung modelliert durch das Integral $\int_0^T u(t)^2 \mathrm{d}t$, so lautet die Aufgabe wie folgt: Für eine gegebene Funktion $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ sei x_u die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) \;=\; ax(t) - u(t), \quad x(0) = x_0\,.$$

Unter allen Funktionen u mit $x_u(T) = 0$ suchen wir diejenige(n), für die der Wert $\int_0^T u(t)^2 \mathrm{d}t$ minimal wird.

(1.10) Beispiel. Die räumliche Orientierung ("Lage") eines starren Körpers (etwa eines Satelliten) zur Zeit t sei gegeben durch eine Rotationsmatrix $g(t) \in \mathrm{SO}(3)$, deren Spalten ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem bilden. Ist $t \mapsto \omega(t)$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, so gilt

$$\dot{g}(t) = L\big(\omega(t)\big)g(t) \quad \text{mit} \quad L(\omega) := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fassen wir $t \mapsto \omega(t)$ als Steuerungsfunktion auf, so können wir versuchen, ω so zu wählen, daß der starre Körper von einer vorgegebenen Anfangslage $g(t_0) = g_0$ in eine gewünschte Ziellage $g(t_1) = g_1$ gedreht wird, und zwar so, daß die Bedingungen $\omega(t_0) = \omega(t_1) = 0$ gelten. (Sowohl am Anfang als auch am Ende des Lagemanövers soll sich also der starre Körper in Ruhe befinden.) Ein Spezialfall ergibt sich, wenn wir $\omega(t) = u(t)c$ mit einer skalaren Funktion $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ und einem festen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ wählen; ein solches Manöver (bei dem also die Drehachse konstant ist) heißt eine **Eigenachsendrehung**.