Programmierprojekt 4: Kontrollsynthese beim Zermelo-Problem

In einer im Jahr 1931 erschienenen Arbeit* behandelte der Mathematiker Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) das folgende Problem:

In einer unbegrenzten Ebene, in welcher die Windverteilung durch ein Vektorfeld als Funktion von Ort und Zeit gegeben ist, bewegt sich ein Fahrzeug mit konstanter Eigengeschwindigkeit relativ zur umgebenden Luftmasse. Wie muß das Fahrzeug gesteuert werden, um in kürzester Zeit von einem Ausgangspunkte zu einem gegebenen Ziel zu gelangen?

Wir können das fragliche Vektorfeld auch als Strömungsfeld eines Gewässers deuten und wollen der Einfachheit halber annehmen, daß die Strömung stationär ist, das Vektorfeld also nicht explizit von der Zeit abhängt. Es sei $\big(f(x,y), g(x,y)\big)^T$ die Geschwindigkeit der Strömung an der Stelle (x,y). Wir können die Einheiten so festlegen, daß die Geschwindigkeit relativ zum Gewässer gleich 1 ist. Das zu lösende Problem lautet dann wie folgt: Wir befinden uns zur Zeit $t = 0$ an der Stelle (x_0, y_0) und wollen nach möglichst kurzer Zeit T den Punkt (x_1, y_1) erreichen. (Je nach sportlicher Disposition können wir an einen Schwimmer oder an eine Bootsfahrt denken.) Zu jedem Zeitpunkt t können wir neu entscheiden, in welche Richtung wir schwimmen wollen; die Richtung sei dabei durch den Winkel $\varphi(t)$ gegenüber der x-Richtung gegeben. In kontrolltheoretischer Formulierung lautet die Aufgabe also folgendermaßen: Wähle die Steuerungsfunktion $t \mapsto \varphi(t)$ so, daß die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x,y) + \cos\varphi \\ g(x,y) + \sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

für einen möglichst kleinen Wert $T > 0$ die Bedingung $\big(x(T), y(T)\big) = (x_1, y_1)$ erfüllt. Die Theorie der Optimalsteuerungen (Pontrjaginsches Maximumprinzip) zeigt, daß bei optimal gewählter Steuerung $t \mapsto \varphi(t)$ die folgende Differentialgleichung gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) + \cos\varphi, \\ \dot{y} &= g(x,y) + \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= g_x(x,y)\sin^2\varphi - f_y(x,y)\cos^2\varphi \\ &\quad + \big(f_x(x,y) - g_y(x,y)\big)\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

Für die drei Funktionen x, y, φ haben wir dann die vier Randbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x(T) = x_1$ und $y(T) = y_1$ zu erfüllen, wobei aber die Zeit T noch nicht festgelegt ist (weswegen kein Standardrandwertproblem vorliegt).

* *Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **11** (2), April 1931, S. 114-124.

Aufgabe 1. Zeige, daß die Aufgabe zu einem Randwertproblem in Standardform äquivalent ist, nämlich dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \big(f(\xi_1,\xi_2) + \cos\xi_3\big)\cdot\xi_4, \\ \xi_2' &= \big(g(\xi_1,\xi_2) + \sin\xi_3\big)\cdot\xi_4, \\ \xi_3' &= \Big(g_x(\xi_1,\xi_2)\sin^2\xi_3 - f_y(\xi_1,\xi_2)\cos^2\xi_3 \\ &\qquad + \big(f_x(\xi_1,\xi_2) - g_y(\xi_1,\xi_2)\big)\sin\xi_3\cos\xi_3\Big)\cdot\xi_4, \\ \xi_4' &= 0 \end{aligned}$$

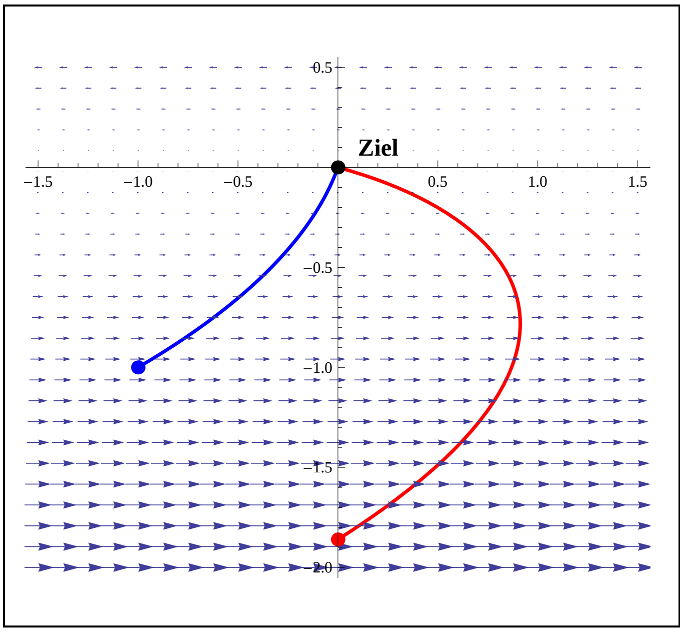
mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= x_0, \\ \xi_2(0) &= y_0, \\ \xi_1(1) &= x_1, \\ \xi_2(1) &= y_1. \end{aligned}$$

Hinweis: Führe die neue Variable $\tau := t/T \in [0,1]$ ein und definiere

$$\begin{aligned} \xi_1(\tau) &:= x(\tau T), \\ \xi_2(\tau) &:= y(\tau T), \\ \xi_3(\tau) &:= \varphi(\tau T), \\ \xi_4(\tau) &:= T. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Schreibe ein MATLAB-Programm, bei dem man ein Strömungsfeld $(x,y) \mapsto \big(f(x,y), g(x,y)\big)^T$, einen Startpunkt (x_0, y_0) und einen Endpunkt (x_1, y_1) beliebig vorgegeben kann und das dann die zugehörige Lösung des Zermelo-Problems numerisch ermittelt und graphisch darstellt. Für das Lösen eines Randwertproblems in Standardformulierung kann dabei die MATLAB-Routine `BVP4C` benutzt werden.



Beispiel: Zwei optimale Bahnkurven für das Strömungsfeld $(x,y) \mapsto (-y, 0)$.