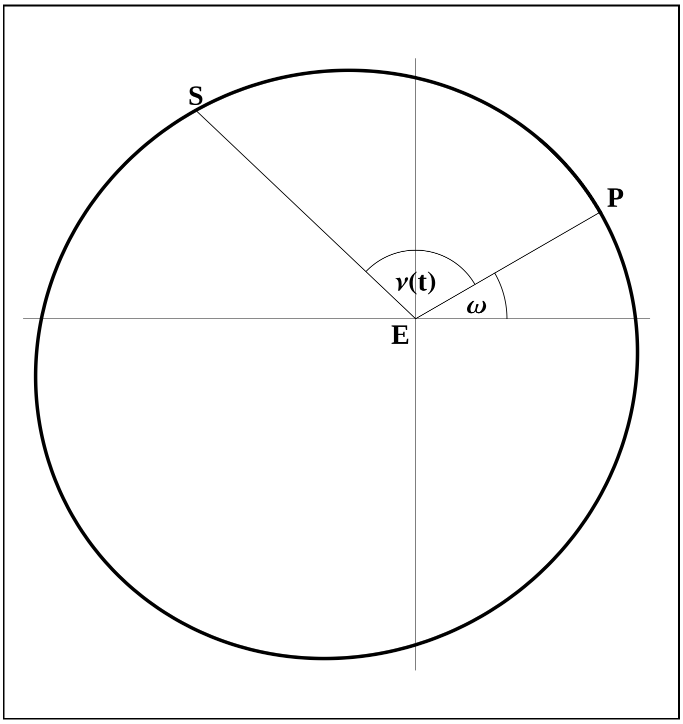
Programmierprojekt 3: Bahnbestimmung eines Satelliten

Die Bahn eines Satelliten, der sich innerhalb der Äquatorebene der Erde bewegt, ist nach den Keplerschen Gesetzen eine Ellipse, deren Form und Lage gegeben ist durch die folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned} a &= \text{große Halbachse}, \\ e &= \text{Exzentrizität}, \\ \omega &= \text{Perigäumsargument}. \end{aligned}$$

Die Position des Satelliten zu einem beliebigen Zeitpunkt ist dann gegeben durch den Winkel $\nu = \angle(PES)$, bei dem P das Perigäum, E die Erde und S den Satelliten bezeichnet.



Position S des Satelliten zu einem Zeitpunkt t.

In einem Koordinatensystem mit der Erde im Nullpunkt ist die Bahnkurve durch die Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\bigl(\nu(t)\bigr)} \begin{bmatrix} \cos\bigl(\omega+\nu(t)\bigr) \\ \sin\bigl(\omega+\nu(t)\bigr) \end{bmatrix}$$

gegeben, wobei die Funktion $t \mapsto \nu(t)$ die **Keplersche Gleichung**

$$\dot{\nu}(t) = \sqrt{\mu} \cdot \frac{1+e\cos\bigl(\nu(t)\bigr)}{\bigl(a(1-e^2)\bigr)^{3/2}}$$

erfüllt, in der μ die Gravitationskonstante der Erde bezeichnet, also $\mu = \Gamma M$ mit der universellen Gravitationskonstanten $\Gamma = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$ und der Erdmasse $M = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg.

Aufgabe 1. Schreibe ein Programm, das als Eingabedaten die Werte a, e, ω, $\nu(0) =: \nu_0$ sowie Zeitpunkte $t_1, \ldots, t_N$ einliest und dann die Entfernungen $r(t_i) = \sqrt{x(t_i)^2 + y(t_i)^2}$ und die Polarwinkel $\varphi(t_i)$ der Punkte $\bigl(x(t_i), y(t_i)\bigr)$ berechnet und in einer ASCII-Datei ausgibt. (Dabei sei $t \mapsto \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ die durch die Werte $a, e, \omega, \nu(0)$ bestimmte Satellitenbahn.) Diese ASCII-Datei sollte aus N Zeilen bestehen, wobei in jeder Zeile die Zeit t_i, der Abstand $r(t_i)$ sowie der Polarwinkel $\varphi(t_i)$ stehen. Dieses Programm simuliert Entfernungs- und Winkelmessungen einer Bodenstation zur Bahnbestimmung des Satelliten.

Aufgabe 2. Modifiziere das in Aufgabe 1 entwickelte Programm so, daß zu jedem Abstandswert $r(t_i)$ und jedem Polarwinkel $\varphi(t_i)$ eine Zufallszahl n_i addiert wird, um die unvermeidlichen Fehler bei Messungen ("Meßrauschen") zu simulieren. Die Zufallszahl n_i sollte dabei Realisierung einer $N(0, \sigma_i)$- bzw. $N(0, \widehat{\sigma}_i)$-verteilten Zufallsvariablen mit einer Standardabweichung sein, die die Genauigkeit der Messung ausdrückt (z. B. $\sigma_i = 5$m für Entfernungsmessungen und $\widehat{\sigma}_i = 2^0$ für Winkelmessungen).

Aufgabe 3. Schreibe ein Programm, das zunächst eine ASCII-Datei einliest, die aus einer Anzahl N von Zeilen besteht, in denen jeweils eine Zeit t_i, ein Abstand r_i und ein Winkel φ_i stehen. (Diese Eingabedatei entspricht den in einer Bodenstation erhaltenen Entfernungs- und Winkelmessungen.) Für jede Wahl der Parameter a, e, ω, ν_0 kann man nun die resultierende Satellitenbahn $t \mapsto \bigl(x(t; a, e, \omega, \nu_0),\ y(t; a, e, \omega, \nu_0)\bigr)$ und die resultierenden Entferungen $r(t_i) = r(t_i; a, e, \omega, \nu_0)$ und Polarwinkel $\varphi(t_i) = \varphi(t_i; a, e, \omega, \nu_0)$ berechnen. Das Programm soll nun diejenigen Werte a, e, ω, ν_0 finden, die bestmöglich an die Meßdaten angepaßt sind, und zwar in dem Sinne, daß der Ausdruck $\sum_{i=1}^N \bigl(r(t_i; a, e, \omega, \nu_0) - r_i\bigr)^2/\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \bigl(\varphi(t_i; a, e, \omega, \nu_0) - \varphi_i\bigr)^2/\widehat{\sigma}_i^2$ minimal wird. Verwende dazu das in der Vorlesung behandelte iterative Verfahren.

Aufgabe 4. Der Teilnehmerkreis wird in zwei Gruppen geteilt. Die erste Gruppe denkt sich Werte a, e, ω, ν_0 aus und erzeugt eine Datei mit dem in Aufgabe 2 entwickelten Simulationsprogramm. Diese Datei (und keinerlei andere Information!) wird an die zweite Gruppe übergeben, die nun das in Aufgabe 3 entwickelte Schätzprogramm einsetzt, um die Werte a, e, ω, ν_0 zu rekonstruieren. Es wird dann geprüft, ob die richtigen Werte gefunden wurden.

Bemerkung. Man kann (und in der Praxis ist das zwingend!) das Schätzprogramm noch dahingehend erweitern, daß nicht nur die Parameterwerte geschätzt werden, sondern auch noch die Genauigkeit bzw. statistische Güte der Schätzwerte ermittelt wird (bei gegebenen statistischen Eigenschaften der Meßwerte). Man kann dann überprüfen, ob der verbleibende Restfehler kompatibel mit den Meßungenauigkeiten ist. Aus Zeitgründen ist eine solche Analyse ("Kovarianzanalyse") aber nicht mehr Bestandteil des Programmierprojekts.