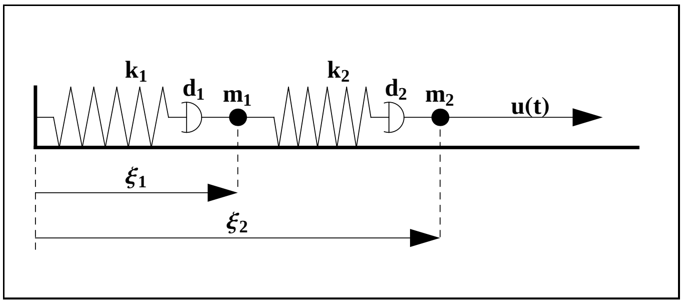
# Programmierprojekt 2: Optimalsteuerung eines schwingenden Systems

Wir betrachten das in (1.2) bzw. (1.3) behandelte System, das aus zwei Massen $m_1$ und $m_2$ und zwei Federn mit den natürlichen (ungedehnten) Längen $\ell_1$ und $\ell_2$ und den Federkonstanten $k_1, k_2 > 0$ besteht, wobei zusätzlich noch Dämpfungs- und/oder Reibungsterme berücksichtigt werden können (Dämpfungskonstanten $d_i$ bzw. $\rho_i$).




**Aufgabe 1.** Schreibe ein Programm, das die folgenden Daten einliest:

- die Massen $m_1$ und $m_2$;
- die natürlichen Federlängen $\ell_1$ und $\ell_2$;
- die Federkonstanten $k_1$ und $k_2$;
- die Dämpfungskonstanten $d_1$ und $d_2$;
- die Reibungskonstanten $\rho_1$ und $\rho_2$.

Das Programm soll ausgeben, ob das System vollständig steuerbar ist.

**Aufgabe 2.** Erweitere das Programm so, daß die folgenden weiteren Parameter (jeweils $i = 1, 2$) eingegeben werden:

- die Anfangspositionen $\xi_i(0)$ beider Massen;
- die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\xi}_i(0)$ beider Massen;
- eine Zeitdauer $T$;
- gewünschte Zielpositionen $z_i$ für die Massen;
- gewünschte Zielgeschwindigkeiten $v_i$ für die Massen.

Das Programm soll dann (im Fall vollständiger Steuerbarkeit) diejenige Steuerung $u$ finden, die das System von dem vorgegebenen Anfangszustand $\big(\xi_1(0), \dot{\xi}_1(0), \xi_2(0), \dot{\xi}_2(0)\big)$ in den gewählten Zielzustand $\big(\xi_1(T), \dot{\xi}_1(T), \xi_2(T), \dot{\xi}_2(T)\big) = (z_1, v_1, z_2, v_2)$ überführt und dabei optimal in dem Sinne ist, daß das Integral $\int_0^T u(t)^2 \mathrm{d}t$ minimal wird. Das Programm soll ferner die Verläufe der Funktionen $u$, $\xi_1$, $\dot{\xi}_1$, $\xi_2$ und $\dot{\xi}_2$ graphisch darstellen. Zur Ermittlungen der Funktionen $\xi_i$ und $\dot{\xi}_i$ sollen die Bewegungsgleichungen numerisch integriert werden. (Eine analytische Lösung ist möglich, aber umständlich.)

**Bemerkung.** Wirklich sinnvoll ist das Programm nur für den Zielzustand $(\ell_1, 0, \ell_1 + \ell_2, 0)$, weil in allen anderen Fällen das System zwar zur vorgegebenen Zeit $T$ einen (beliebig vorgebbaren) Zielzustand annimmt, diesen Zustand aber sofort wieder ändert. Beim Begriff der Steuerbarkeit geht es nur darum, einen Zielzustand für einen Augenblick zu erreichen, nicht darum, diesen Zustand festzuhalten (was nur im Fall einer Ruhelage des Systems automatisch erfolgt).

**Aufgabe 3.** Ergänze das in Aufgabe 2 entwickelte Programm so, daß die aus der Steuerung $u$ resultierende Bewegung des schwingenden Systems graphisch veranschaulicht wird. Benutze dazu zwei Unterprogramme "Feder" und "Pfeil", um (zu einer beliebigen Zeit $t \in [0, T]$) die beiden Federn darzustellen und die Steuerung $u(t)$ durch einen Pfeil zu visualisieren, dessen Richtung und Dicke das Vorzeichen bzw. den Betrag der Steuerung $u(t)$ repräsentiert.

• **Hinweis 1:** Der Befehl `ctrb(A,B)` liefert die Steuerbarkeitsmatrix für ein System der Form $\dot{x} = Ax + Bu + g$ mit konstanten Matrizen $A$ und $B$. (Analog gibt es auch einen Befehl `obsv(A,C)` zur Ermittlung der Beobachtbarkeitsmatrix eines Systems mit konstanten Koeffizienten.)

• **Hinweis 2:** Die numerische Integration erfolgt durch Aufruf eines der in Matlab verfügbaren Integratoren, zum Beispiel `ode45`.