Programmierprojekt 1: Kontrollsynthese beim Dubins-Problem

In einer 1957 erschienenen Arbeit[1] wurde das folgende Problem untersucht: Ein Fahrzeug stehe an einem Punkt A einer Ebene und zeige in eine Richtung v. Es soll umgeparkt werden, und zwar so, daß es am Ende des Parkvorgangs an einem vorgegebenen Punkt B steht und in eine vorgegebene Richtung w zeigt. Die beiden Richtungen v und w kann man durch ihre Polarwinkel angeben; sagen wir

$$v = e(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad w = e(\psi) := \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix},$$

wobei der Buchstabe e an "Einheitsvektor" erinnern soll. Das Fahrzeug habe dabei einen gegebenen Wenderadius R. Gesucht ist die kürzeste Bahnkurve, die die Anfangskonfiguration (A, v) in die Endkonfiguration (B, w) überführt. Dabei sei nur Vorwährtsfahren erlaubt.[2] Das von Dubins gefundene Ergebnis besagt, daß die optimale Kurve gegeben ist durch drei aneinandergesetzte Kreisbögen vom Radius R, zwei Kreisbögen vom Radius R mit einem Geradenstück dazwischen oder einem Teilstück einer solchen Kurve. Dies gibt dann die folgenden Möglichkeiten:

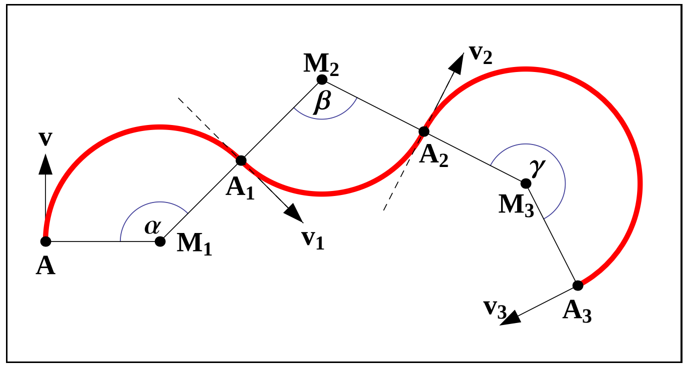
(1) Kreisbogen nach rechts, Kreisbogen nach links, Kreisbogen nach rechts
(2) Kreisbogen nach links, Kreisbogen nach rechts, Kreisbogen nach links
(3) Kreisbogen nach rechts, Geradenstück, Kreisbogen nach links
(4) Kreisbogen nach rechts, Geradenstück, Kreisbogen nach rechts
(5) Kreisbogen nach links, Geradenstück, Kreisbogen nach rechts
(6) Kreisbogen nach links, Geradenstück, Kreisbogen nach links

Es soll ein Programm geschrieben werden, das die Eingabedaten A, $v = e(\varphi)$, B, $w = e(\psi)$ sowie R einliest, dann die optimale Kurve berechnet und diese schließlich graphisch darstellt.

Aufgabe 1. Schreibe ein Programm, das aus den Eingabedaten A, $v = e(\varphi)$ sowie $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ die bei einer Kurve vom Typ (1) auftretenden Punkte M_1, A_1, M_2, A_2, M_3, A_3 sowie den Richtungsvektor v_3 gemäß der folgenden Zeichnung berechnet und diese Kurve dann zeichnet.

[1] Lester E. Dubins, *On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents*, American Journal of Mathematics **79** (3), Juli 1957, S. 497-516.

[2] Das Problem wird deutlich schwieriger, wenn auch Rückwärtsfahren erlaubt ist: J. A. Reeds, L. A. Shepp, *Optimal Paths for a Car That Goes Forwards and Backwards*, Pacific Journal of Mathematics **145** (2), 1990, S. 367-393.

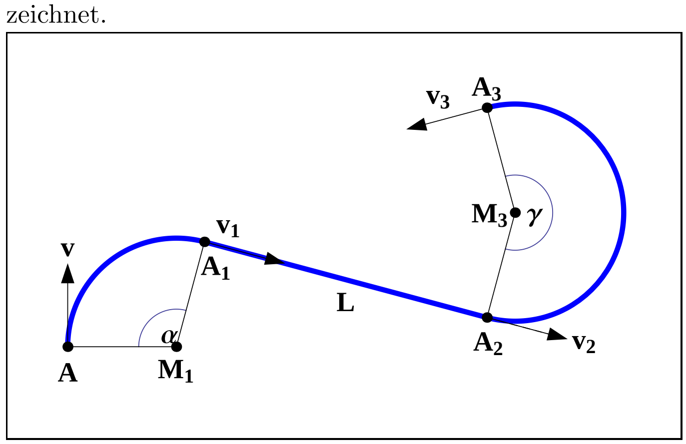


Kurve vom Typ (1).

Aufgabe 2. Analysiere die Lösung zu Aufgabe 1, um die aus den gegebenen Winkeln α, β, γ resultierende Endkonfiguration $(A_3, v_3) = \big(A_3(\alpha, \beta, \gamma), v_3(\alpha, \beta, \gamma)\big)$ zu berechnen. Löse dann bei vorgegebener Endkonfiguration (B, w) die Gleichungen $A_3(\alpha, \beta, \gamma) = B$ und $v_3(\alpha, \beta, \gamma) = w$ nach α, β und γ auf, um das ursprüngliche Problem zu lösen. (Da die Sonderfälle $\gamma = 0$ bzw. $\beta = \gamma = 0$ erlaubt sind, ist der Fall gleich mitbehandelt, daß die optimale Fahrtkurve nur aus einem Kreisbogen oder zwei Kreisbögen besteht.)

Aufgabe 3. Löse die zu Aufgabe 1 und Aufgabe 2 analogen Aufgabe für eine Kurve vom Typ (2).

Aufgabe 3. Schreibe ein Programm, das aus den Eingabedaten A, $v = e(\varphi)$ sowie $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi)$ und $L \geq 0$ die bei einer Kurve vom Typ (3) auftretenden Punkte M_1, A_1, A_2, M_3, A_3 sowie den Richtungsvektor v_3 gemäß der folgenden Zeichnung berechnet und diese Kurve dann zeichnet.



Kurve vom Typ (3).

Aufgabe 4. Analysiere die Lösung zu Aufgabe 3, um die aus den Daten α, L, γ resultierende Endkonfiguration $(A_3, v_3) = \big(A_3(\alpha, L, \gamma), v_3(\alpha, L, \gamma)\big)$ zu berechnen. Löse dann bei vorgegebener Endkonfiguration (B, w) die Gleichungen $A_3(\alpha, L, \gamma) = B$ und $v_3(\alpha, L, \gamma) = w$ nach α, L und γ auf, um das ursprüngliche Problem zu lösen. (Da die Sonderfälle $\alpha = 0$, $L = 0$ und $\gamma = 0$ erlaubt sind, ist der Fall gleich mitbehandelt, daß die optimale Fahrtkurve nur aus einem Kreisbogen, nur aus einem Geradenstück oder nur aus einem Kreisbogen und einem Geradenstück besteht.)

Aufgabe 5. Löse die zu den Aufgaben 3 und 4 analogen Aufgaben für die Kurven der Typen (4), (5), (6).

Aufgabe 6. Schreibe ein Programm, das die Anfangsdaten (A, v), (B, w) und R einliest und dann

- ermittelt, welche Kurven der Typen (1) bis (6) überhaupt möglich sind, um die Anfangskonfiguration (A, v) in die Endkonfiguration (B, w) zu überführen;
- ermittelt, welche der gefundenen möglichen Kurven optimal sind (also kürzestmögliche Länge haben);
- die optimalen Lösungen graphisch darstellt.