
Lösung 4: Systemrealisierungen

Lösung (4.1) Wir schreiben

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [7 \quad 2]$$

und

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [-11 \quad 13].$$

Um zu zeigen, daß die beiden Systeme (A, B, C) und $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ äquivalent sind (also das gleiche Eingabe-Ausgabe-Verhalten aufweisen), genügt es gemäß (4.2), eine Transformationsmatrix P zu finden mit

$$\hat{A} = PAP^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = CP^{-1}.$$

Wegen

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Zugehörige Eigenvektoren (jeweils eindeutig bestimmt bis auf einen Skalarfaktor) sind gegeben durch $v_1 = (1, 2)^T$ und $v_2 = (1, 3)^T$. Setzen wir also

$$Q := \begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 3b \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P := Q^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} 3b & -b \\ -2a & a \end{bmatrix}$$

mit beliebigen Faktoren $a, b \neq 0$, so haben wir jedenfalls $\hat{A} = Q^{-1}AQ = PAP^{-1}$. Ferner erhalten wir

$$PB = \begin{bmatrix} -1/a \\ 1/b \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad CP^{-1} = CQ = [11a \quad 13b].$$

Wählen wir $a := -1$ und $b := 1$, so sind die gewünschten Bedingungen $\hat{B} = PB$ und $\hat{C} = CP^{-1}$ erfüllt, und die Äquivalenz der beiden Systeme ist gezeigt.

Lösung (4.2) Anwenden der Laplace-Transformation \mathfrak{L} auf die Gleichungen

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

liefert für $X := \mathfrak{L}x, U := \mathfrak{L}u$ und $Y := \mathfrak{L}y$ die Gleichungen

$$(2) \quad zX(z) = AX(z) + BU(z), \quad Y(z) = CX(z)$$

und damit $(z\mathbf{1} - A)X = BU$, folglich $X = (z\mathbf{1} - A)^{-1}BU$ und schließlich $Y = C(z\mathbf{1} - A)^{-1}BU$. Dies ist schon die Behauptung. In dem betrachteten Beispiel haben wir

$$\begin{aligned} G(z) &= [7 \quad 2] \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2 - 5z + 6} [7 \quad 2] \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2 - 5z + 6} [7 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} = \frac{2z + 7}{z^2 - 5z + 6}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Man sagt, die Laplace-Transformation überführe die Gleichung (1) im Zustandsbereich in die Gleichung (2) im Frequenzbereich. In der klassischen Regelungstechnik werden typischerweise Untersuchungen im Frequenzbereich statt im Zustandsbereich durchgeführt, was allerdings nur für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten möglich ist.

Lösung (4.3) Wir haben

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wegen (1.7) und dann

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

wegen (3.8). Eine etwas mühselige Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} (z\mathbf{1} - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ -3\omega^2 & z & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & z & -1 \\ 0 & 2\omega & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2(z^2 + \omega^2)} \begin{bmatrix} z^3 + 4\omega^2 z & z^2 & 0 & 2\omega z \\ 3\omega^2 z^2 & z^3 & 0 & 2\omega z^2 \\ -6\omega^2 & -2\omega z & z^3 + \omega^2 z & z^2 - 3\omega^2 \\ -6\omega^3 z & -2\omega z^2 & 0 & z^3 - 3\omega^2 z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$G(z) = C(z\mathbf{1} - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2 + \omega^2} & \frac{2\omega}{z(z^2 + \omega^2)} \\ \frac{-2\omega}{z(z^2 + \omega^2)} & \frac{z^2 - 3\omega^2}{z^2(z^2 + \omega^2)} \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Wie in Lösung (4.2) bereits bemerkt, rechnet man in der klassischen Regelungstechnik im Frequenzbereich statt im Zustandsbereich. Man versucht daher auch, Begriffe wie Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit durch Begriffe und Kriterien zu erfassen, deren Anwendung nicht das Verlassen des Frequenzbereichs erfordert. Wir wollen das hier nicht ausführen, aber zumindest andeuten, wie solche Kriterien im vorliegenden Beispiel aussehen könnten. Die maximale Differenz zwischen Zählergrad und Nennergrad in der ersten Spalte von $G(z)$ ist 3 (nicht 4); hieraus kann man schließen, daß das System allein durch u_1 nicht steuerbar ist. Analog ist die maximale Differenz zwischen Zählergrad und Nennergrad in der ersten Zeile von $G(z)$ nur 3 (nicht 4), so daß das System allein mit y_1 als Ausgabe nicht beobachtbar ist.

Lösung (4.4) Es sei $x(s) = 0$. Wir haben dann $y(t) = 0$ für $t \leq s + 1$ und

$$y(t) = x(t) = \int_s^t \dot{x}(\theta) d\theta = \int_{s+1}^t u(\theta-1) d\theta = \int_s^{t-1} u(\tau) d\tau$$

für $t \geq s + 1$. Dies können wir schreiben als

$$y(t) = \int_s^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \text{ mit } g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1, \\ 0, & \text{falls } x \leq 1. \end{cases}$$

Wir sehen, daß der auftretende Integralkern nur von $t - \tau$ abhängt. Gäbe es also eine Realisierung des Systems, dann gäbe es auch eine zeitinvariante Realisierung. Wir hätten dann eine Darstellung $y(t) = \int_s^t C e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau$ für alle t und damit $C e^{xA} B = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion, die auf einem gesamten Intervall verschwindet, müßte aber überall verschwinden, was $y \equiv 0$ zur Folge hätte. Es kann also keine solche Realisierung geben.

Lösung (4.5) Wir nehmen an, der Übergang $\cos(\omega \bullet) \mapsto \sin(\omega \bullet)$ könne durch ein System (A, B, C) realisiert werden. Mit $K(t, \tau) := C(t)X(t, \tau)B(\tau)$ hätten wir dann

$$\sin(\omega t) = \int_s^t K(t, \tau) \cos(\omega \tau) d\tau$$

für alle ω und alle $t \geq s$. Dann müßte jedenfalls $\sin(\omega s) = 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gelten, was $s = 0$ erzwingt. Zweimaliges Ableiten der Gleichung

$$(1) \quad \sin(\omega t) = \int_0^t K(t, \tau) \cos(\omega \tau) d\tau$$

nach ω lieferte

$$(2) \quad -t^2 \sin(\omega t) = - \int_0^t K(t, \tau) \tau^2 \cos(\omega \tau) d\tau.$$

Addition von (2) zum t^2 -fachen von (1) ergäbe dann

$$0 = \int_0^t K(t, \tau)(t^2 - \tau^2) \cos(\omega \tau) d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$, was nur für $K \equiv 0$ möglich ist. Die Bedingung $K \equiv 0$ widerspräche aber (1). Es kann also kein (endlichdimensionales) lineares System geben, das auf jede Eingabe der Form $u(t) = \cos(\omega t)$ mit der Ausgabe $y(t) = \sin(\omega t)$ antwortet.

Lösung (4.6) (a) **Erste Lösung.** Ist $A(t) \equiv A_0$, so ist $X(t, s) = \exp((t-s)A_0)$. Die zu erfüllende Gleichung lautet also

$$H(t)G(\tau) = C(t)e^{(t-\tau)A_0}B(\tau) = C(t)e^{tA_0}e^{-\tau A_0}B(\tau)$$

mit $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $B(\tau) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Diese Gleichung wird gelöst, wenn wir

$$C(t) := H(t)M^{-1}e^{-tA_0} \quad \text{und} \quad B(\tau) := e^{\tau A_0}MG(\tau)$$

mit irgendeiner invertierbaren Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wählen.

Zweite Lösung: Wir wählen *irgendeine* Realisierung $(A(t), B(t), C(t))$ mit $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und versuchen, eine Koordinatentransformation $\xi(t) = P(x)x(t)$ so zu finden, daß für die resultierende Realisierung $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ die Gleichung $\hat{A} = A_0$ gilt. Gemäß (4.2) haben wir $\hat{A} = PAP^{-1} + \dot{P}P^{-1}$, also $\hat{A}P = PA + \dot{P}$. Um $\hat{A} = A_0$ zu erhalten, müssen wir also nur P als Lösung der Differentialgleichung $\dot{P}(t) = A_0P(t) - P(t)A(t)$ wählen (und das ist möglich, weil nach dem Satz von Peano oder dem Satz von Picard und Lindelöf diese Differentialgleichung eine Lösung besitzt).

(b) Wir wählen in (a) für A_0 die (1×1) -Matrix mit dem Wert a . Die zu erfüllende Gleichung lautet dann $\cos(t) \exp(\tau) = c(t)e^{at}e^{-a\tau}b(\tau)$ und führt auf $\cos(t) = c(t)e^{at}b_0$ und $\exp(\tau) = c_0e^{-a\tau}b(\tau)$. Wählen wir $b_0 := c_0 := 1$, so erhalten wir $c(t) = \cos(t)e^{-at}$ und $b(\tau) = e^{(a+1)\tau}$. Die Eingabe-Ausgabe-Relation

$$y(t) = \int_s^t \cos(t)e^{\tau}u(\tau) d\tau$$

wird also realisiert von dem System

$$\dot{x}(t) = ax(t) + e^{(a+1)t}u(t), \quad y(t) = \cos(t)e^{-at}x(t).$$

Lösung (4.7) Wir führen die (zeitlich variable) Koordinatentransformation

$$\xi(t) := e^{-tD}x(t)$$

durch und erhalten dann

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -De^{-tD}x + e^{-tD}\dot{x} \\ &= -De^{-tD}x + e^{-tD}(Ax + e^{tD}Bu) \\ &= -De^{-tD}x + Ae^{-tD}x + Bu \\ &= -D\xi + A\xi + Bu \\ &= (A - D)\xi + Bu \end{aligned}$$

sowie $y = Ce^{-tD}x = C\xi$. Die Koordinatentransformation liefert also das zeitinvariante System

$$\dot{\xi} = (A - D)\xi + Bu, \quad y = C\xi.$$

Da sich bei einer Koordinatentransformation im Zustandsraum das Eingabe-Ausgabe-Verhalten nicht ändert, hat dieses zeitinvariante System das gleiche Eingabe-Ausgabe-Verhalten wie das Originalsystem.

Lösung (4.8) Für $P(t) := \exp(t(A^T - A)/2)$ erhalten wir $\dot{P} = P(A^T - A)/2$ und gemäß (4.2) dann

$$\begin{aligned} \hat{A} &= PAP^{-1} + \dot{P}P^{-1} = PAP^{-1} + P((A^T - A)/2)P^{-1} \\ &= P((A^T + A)/2)P^{-1} = P((A^T + A)/2)P^T, \end{aligned}$$

und diese Matrix ist offensichtlich symmetrisch. Ferner gelten gemäß (4.2) auch die Gleichungen

$$\hat{B} = PB = \exp(t(A^T - A)/2)$$

und

$$\hat{C} = CP^{-1} = C \exp(t(A - A^T)/2).$$

Da für eine schiefsymmetrische Matrix M die Matrix $\exp(tM)$ stets orthogonal ist und damit die Spektralnorm 1 hat, sind die Funktionen $t \mapsto B(t)$ und $t \mapsto C(t)$ beschränkt.

Lösung (4.9) Es seien $t \mapsto T(t)$ die vom Thermometer angezeigte Temperatur und $t \mapsto U(t)$ die jeweilige Umgebungstemperatur. Ist A die Außentemperatur (bzw. die Temperatur des kalten Raums, in dem sich das Thermometer ursprünglich befand) und ist R die Temperatur des warmen Raums, in den das Thermometer gebracht wird, so haben wir

$$(\star) \quad U(t) = \begin{cases} A, & \text{falls } t < 0; \\ R, & \text{falls } t \geq 0. \end{cases}$$

Man würde vielleicht zunächst (naiv) erwarten, daß sich die Temperaturanzeige gemäß dem Newtonschen Gesetz

$$\dot{T}(t) = r(R - T(t))$$

entwickelt, in dem r die Wärmeaustauschrate zwischen Raum und Thermometer bezeichnet. Die Lösung wäre dann aber

$$(1) \quad T(t) = R - (R - T(0))e^{-rt}$$

und damit eine streng monoton wachsende Funktion, was dem anfänglich beobachteten Temperaturabfall widerspräche. Eine mögliche Erklärung könnte sein, daß das Thermometer aufgrund innerer Trägheit erst mit einer Zeitverzögerung τ auf die tatsächliche Umgebungstemperatur reagierte, daß also eine Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= r \cdot (U(t - \tau) - T(t)) \\ &= \begin{cases} r \cdot (A - T(t)), & \text{falls } t < \tau \\ r \cdot (R - T(t)), & \text{falls } t \geq \tau \end{cases} \end{aligned}$$

gälte. Dann wäre

$$(2) \quad T(t) = \begin{cases} A - (A - T(0))e^{-rt}, & \text{falls } t < \tau; \\ R - (R - T(\tau))e^{-r(t-\tau)}, & \text{falls } t \geq \tau. \end{cases}$$

(Dabei wäre $T(\tau)$ als der Grenzwert für $t \mapsto \tau_-$ des oberen Ausdrucks zu wählen, damit die Funktion T stetig wird.) Versuchen wir, eine solche Funktion durch geeignete Wahl der Parameter $T(0)$, τ , R , A und r an die Meßdaten anzupassen, so erhalten wir zwar einen Verlauf, der einen anfänglichen Abfall in der Temperaturanzeige liefert, der sich aber nicht befriedigend an die tatsächlich erhaltenen Temperaturmessungen anpaßt.

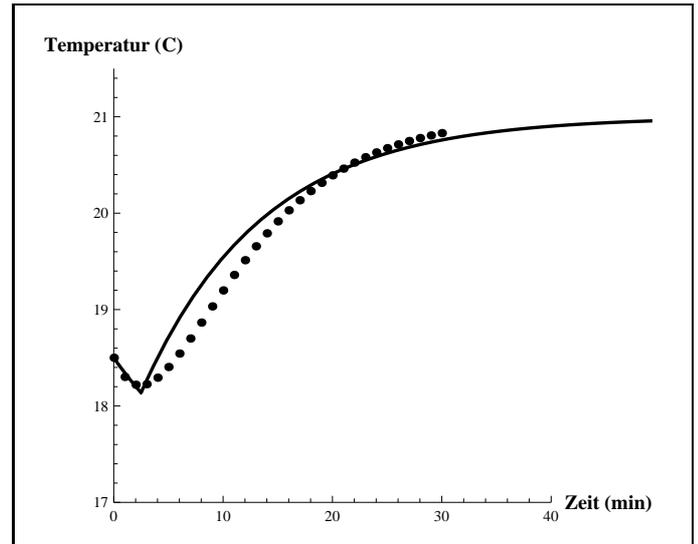


Abb. 4.9a: Verlauf einer Lösung der Form (2) nach Parameteranpassung.

Eine gute Anpassung an die Meßdaten erhalten wir dagegen, wenn wir annehmen, daß das Thermometer nicht direkt auf die Umgebungstemperatur reagiert, sondern daß zunächst ein Wärmeaustausch zwischen der Umgebung und dem Gehäuse stattfindet, in dem sich das Thermometer befindet, und dann ein weiterer Wärmeaustausch zwischen dem Gehäuse und dem Thermometer selbst. Bezeichnen wir mit $M(t)$ die Manteltemperatur (also die Temperatur im Gehäuse), so legt dies ein System zweier gekoppelter Gleichungen $\dot{T}(t) = r_1(M(t) - T(t))$ und $\dot{M}(t) = r_2(U(t) - M(t))$ nahe, für $t \geq 0$ also

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{T}(t) &= r_1(M(t) - T(t)), \\ \dot{M}(t) &= r_2(R - M(t)). \end{aligned}$$

Anpassung der Parameter $T(0)$, $M(0)$, R , r_1 und r_2 an die Meßdaten liefert hier eine hervorragende Übereinstimmung zwischen den aufgrund der Modellannahme (3) theoretisch erwarteten und den tatsächlich erhaltenen Meßwerten.

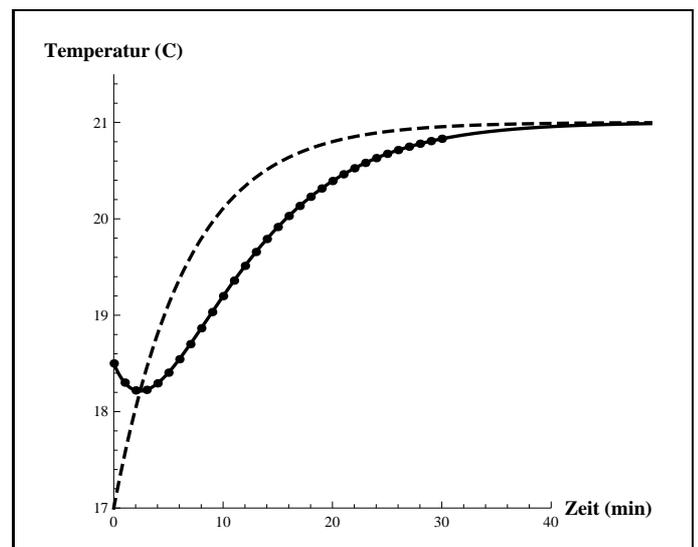


Abb. 4.9b: Verlauf der Funktionen T (durchgezogen) und M gestrichelt) gemäß (3) nach Parameteranpassung.

Was hat dieses Beispiel mit dem Thema “Systemrealisierungen” zu tun? Die beobachtete Temperaturanzeige $t \mapsto T(t)$ ist die Systemantwort auf die durch (\star) gegebene Einflußfunktion U . Das beobachtete Eingabe-Ausgabe-Verhalten (selbst für die einzelne gewählte Einflußfunktion U) läßt sich nicht durch ein eindimensionales System realisieren, sondern erfordert die Einführung einer zweiten (zunächst “verborgenen” und nicht direkt zugänglichen) Zustandsvariablen. Eine Realisierung mit einem zweidimensionalen Zustandsraum könnte durch zahlreiche Experimente, in denen das Thermometer wechselnden Umgebungstemperaturen ausgesetzt wird, prinzipiell auch mit den in der Vorlesung bereitgestellten Methoden gefunden werden, statt die Modellannahme (3) zu machen und zu verifizieren, daß diese für geeignete Parameterwahlen das beobachtete Systemverhalten erklärt.