Lösung 3: Beobachtbarkeit

Lösung (3.1) Erweitere den Zustandsvektor $x \in \mathbb{R}^n$ zu dem Zustandsvektor $(x,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+n}$, der das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x,t,u,q) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ q(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p \end{bmatrix}.$$

Sind die Messungen gegeben durch die Funktion $y(t) = g(t,x,u)$, so setzen wir $G(t,x,u,q) := g(t,x,u)$. Den Anfangszustand x_0 und den Parametervektor p aus den Messungen $y(t) = g\big(t,x(t),u(t)\big)$ zu schätzen, ist dann äquivalent dazu, den Anfangszustand (x_0,p) des erweiterten Systems $(\star)$ aus den Messungen $y(t) = G\big(t,x(t),u(t),q(t)\big)$ zu schätzen.

Lösung (3.2) Ist die Steuerung u fest gewählt, so sind die beiden Differentialgleichungen $\dot{x}_1 = a_1x_1 + b_1u$ und $\dot{x}_2 = a_2x_2 + b_2u$ vollständig entkoppelt. Vollkommen unabhängig davon, wie wir den Anfangswert $x_2(0)$ wählen, liefert das System immer die gleichen Messungen (denn y hängt nur von x_1 ab, und x_1 ist von $x_2(0)$ unabhängig); also kann die zweite Zustandskomponente nicht aus den Messungen rekonstruiert werden. Das System ist damit nicht beobachtbar.

Lösung (3.3) Die Zustandsgleichung lautet $\dot{x} = Ax$ mit der in (1.2) angegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, und wir haben die Meßgleichung $y = Cx$ mit $C = (0,1,0,0)$. Wir erhalten also

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & d_2/m_2 & -d_2/m_2 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= -d_2\big(m_2(k_1+k_2)+m_1k_2\big)/(m_1m_2^2), \\ \beta &:= k_2d_2(m_1+m_2)/(m_1m_2^2), \\ \gamma &:= \big(k_2m_1m_2 - m_2d_2(d_1+d_2) - m_1d_1^2\big)/(m_1m_2^2), \\ \delta &:= (-m_1m_2k_2 + m_2d_2^2 + m_1d_2^2)/(m_1m_2^2). \end{aligned}$$

Als Determinante dieser Matrix ergibt sich $(d_2\alpha - k_2\gamma)/m_2$. Das System ist daher genau dann beobachtbar, wenn $d_2\alpha \neq k_2\gamma$ gilt.

Lösung (3.4) Die Meßgleichung ist $y = Cx$ mit $C = (1,0)$. Mit der in (1.4) angegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erhalten wir also

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(f_ar_a+f_ir_i)/c_m & f_ir_i/c_m \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix ist für alle $r_i \neq 0$ invertierbar, das System daher vollständig beobachtbar. Nur in dem (physikalisch unrealistischen) Fall $r_i = 0$ ist das System *nicht* beobachtbar, und das ist auch physikalisch klar: Die Bedingung $r_i = 0$ bedeutet eine vollständige Isolierung zwischen Ofeninnerem und Ofenmantel, so daß keinerlei Wärmeaustausch zwischen diesen beiden Kompartimenten stattfindet. In diesem Fall ist es natürlich nicht möglich, von der gemessenen Manteltemperatur auf die (dann konstante) Innentemperatur zu schließen.

Lösung (3.5) Das System hat die Form $\dot{x} = Ax+Bu$, $y = Cx$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1/(R_1C) & 0 \\ 0 & -R_2/L \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1/(R_1C) \\ 1/L \end{bmatrix}, \; C = [\,0 \quad 1\,].$$

Die Kalman-Matrix

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1/(R_1C) & -1/(R_1^2C^2) \\ 1/L & -R_2/L^2 \end{bmatrix}$$

hat die Determinante $(L - CR_1R_2)/(L^2C^2R_1^2)$; das System ist also genau dann vollständig steuerbar, wenn $L \neq CR_1R_2$ gilt. Ferner erhalten wir

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -R_2/L \end{bmatrix},$$

und diese Matrix hat nur den Rang 1. Unabhängig von den Parameterwerten ist das System also nicht beobachtbar. Genauer: Die Zustandsgröße $x_1 = U_C$, also der Spannungsabfall am Kondensator, ist also aus der Messung des Stroms I_2 nicht ermittelbar.

Lösung (3.6) Wir haben

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = [\,1 \quad 1\,]$$

und daher

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a+c & -b-d \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Determinante $-(a+b+c+d) < 0$, ist also invertierbar. Das betrachtete System ist daher vollständig beobachtbar; aus den Gesamtzählungen lassen sich also die Zahl der Räuber und die Zahl der Beutetiere auch separat ermitteln.

Lösung (3.7) Da der Durchfluß von einem Kompartiment in das nächste immer der gleiche ist, bleiben die Volumina V_1 und V_2 konstant. In einem infinitesimal kleinen Zeitintervall $[t, t+\mathrm{d}t]$ ist die Änderung der Salzmenge im i-ten Kompartiment gegeben durch

$$V_i\,x_i(t+\mathrm{d}t) - V_i\,x_i(t) = k_{i-1}\cdot F\,\mathrm{d}t - k_i\cdot F\,\mathrm{d}t.$$

Division durch $\mathrm{d}t$ liefert $V_i\dot{x}_i = k_{i-1}F - k_iF$; wegen $k_1 = x_1$ und $k_2 = x_2$ haben wir also $\dot{x}_1 = F(k_0 - x_1)/V_1$ und $\dot{x}_2 = F(x_1 - x_2)/V_2$. Wir erhalten die Zustandsgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F/V_1 & 0 \\ F/V_2 & -F/V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F/V_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

und die Meßgleichung

$$y \;=\; [0\;\;1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

haben also

$$A = \begin{bmatrix} -F/V_1 & 0 \\ F/V_2 & -F/V_2 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} F/V_1 \\ 0 \end{bmatrix},\; C = [\,0 \quad 1\,]$$

und damit

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} F/V_1 & -F^2/V_1^2 \\ 0 & F^2/V_1V_2 \end{bmatrix}$$

sowie

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F/V_1 & -F/V_2 \end{bmatrix}.$$

Die beiden Matrizen sind invertierbar; also ist das System vollständig steuer- und beobachtbar (außer in dem Trivialfall $F = 0$, in dem keinerlei Kochsalzlösung durch das System fließt; in diesem Fall ist das System natürlich weder steuerbar noch beobachtbar).

Lösung (3.8) (a) Mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = [\,c_1 \quad c_2\,]$$

erhalten wir

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1+2c_2 & -c_1-4c_2 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist $-(c_1^2 + 3c_1c_2 + 2c_2^2) = -(c_1+c_2)(c_1+2c_2)$. Das System ist also genau dann nicht beobachtbar, wenn $c_1 = -c_2$ oder $c_1 = -2c_2$ gilt. Die Lösung der Systemgleichung ist $x(t) = \exp(tA)x_0$, also

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \;&=\; \exp\left(t\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\
&= e^{-2t}\big(2x_1(0) - x_2(0)\big)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-3t}\big(x_2(0) - x_1(0)\big)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Die gemessene Funktion $y(t) = (c_1, c_2)x(t)$ ist daher

$$\begin{aligned}
y(t) \;&= e^{-2t}\big(2x_1(0) - x_2(0)\big)(c_1 + c_2) \\
&\quad + e^{-3t}\big(x_2(0) - x_1(0)\big)(c_1 + 2c_2).
\end{aligned}$$

Für $c_1 = -c_2$ ergibt sich also die Meßfunktion $y(t) = c_2e^{-3t}\big(x_2(0) - x_1(0)\big)$, aus der sich (für $c_2 \neq 0$) zwar der Ausdruck $x_2(0) - x_1(0)$ ermitteln läßt, nicht aber die beiden Werte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ separat. Für $c_1 = -2c_2$ ergibt sich die Meßfunktion $y(t) = -c_2e^{-2t}\big(2x_1(0) - x_2(0)\big)$, aus der sich (für $c_2 \neq 0$) zwar der Ausdruck $2x_1(0) - x_2(0)$ ermitteln läßt, nicht aber die beiden Werte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ separat.

(b) Diese Aussage trifft zu, und zwar nicht nur in diesem Beispiel, sondern ganz allgemein. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ist m_i die Vielfachheit von λ_i, so ist die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{x} = Ax$ von der Form

$$x(t) \;=\; \sum_{i=1}^{d} e^{\lambda_i t}(v_i^{(0)} + tv_i^{(1)} + \cdots + t^{m_i-1}v_i^{(m_i-1)}).$$

Tritt nun der Exponentialterm $e^{\lambda_i t}$ in der Meßfunktion $y = Cx$ nicht auf, so bedeutet dies $Cv_i^{(k)} = 0$ für $0 \le k \le m_i - 1$). Insbesondere läßt sich dann $v_i^{(0)}$ nicht aus den Messungen ermitteln, damit aber auch nicht $x(0) = \sum_{i=1}^d v_i^{(0)}$.

(c) Es gelte $(c_1, c_2) = (1, 2)$. Ist $y(t) = 21e^{-2t} - 20e^{-3t}$, so liefert ein Vergleich mit Teil (a) die Gleichungen $2x_1(0) - x_2(0) = 7$ und $x_1(0) - x_2(0) = 4$, aus denen sich der Anfangszustand $\big(x_1(0), x_2(0)\big) = (3, -1)$ ergibt.

Lösung (3.9) (a) Wegen $M^T = (\int X^TC^TCX)^T = \int (X^TC^TCX)^T = \int X^TC^TC^{TT}X^{TT} = \int X^TC^TCX = M$ ist M symmetrisch. Die positive Semidefinitheit von $M(s,t)$ ergibt sich aus der für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned}
v^TM(s,t)v \;&=\; \int_s^t v^TX(\tau,s)^TC(\tau)^TC(\tau)X(\tau,s)v\,\mathrm{d}\tau \\
&=\; \int_s^t \|C(\tau)X(\tau,s)v\|^2\mathrm{d}\tau \;\ge\; 0.
\end{aligned}$$

(b) Die Anfangsbedingung $M(s,s) = 0$ ist trivial. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(\tau,s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s,\tau)^{-1} = -X(s,\tau)^{-1}\dot{X}(s,\tau)X(s,\tau)^{-1} \\
&= -X(s,\tau)^{-1}A(s)X(s,\tau)X(s,\tau)^{-1} = -X(\tau,s)A(s).
\end{aligned}$$

Für $M'(s,t)$ ergibt sich daher der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&-X(s,s)^TC(s)^TC(s)X(s,s) \\
&\qquad + \int_s^t \big(-X(\tau,s)A(s)\big)^TC(\tau)^TC(\tau)X(\tau,s)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_s^t X(\tau,s)^TC(\tau)^TC(\tau)\big(-X(\tau,s)A(s)\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \;-C(s)^TC(s) - A(s)^T\int_s^t X(\tau,s)C(\tau)^TC(\tau)X(\tau,s)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - \left(\int_s^t X(\tau,s)^TC(\tau)^TC(\tau)X(\tau,s)\,\mathrm{d}s\right)A(s);
\end{aligned}$$

das bedeutet

$$M'(s,t) \;=\; -C(s)^TC(s) - A(s)^TM(s,t) - M(s,t)A(s).$$

(c) Wir haben

$$\begin{aligned}
M(t_1,t_3) \;&=\; \int_{t_1}^{t_3} X(\tau,t_1)^TC(\tau)^TC(\tau)X(\tau,t_1)\,\mathrm{d}\tau \\
&=\; \left(\int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_3}\right)X(\tau,t_1)^TC(\tau)^TC(\tau)X(\tau,t_1)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Das erste der beiden Integrale ist

$$\int_{t_1}^{t_2} X(\tau,t_1)^T C(\tau)^T C(\tau) X(\tau,t_1)\,\mathrm{d}\tau \;=\; M(t_1,t_2).$$

Das zweite Integral ist

$$\int_{t_2}^{t_3} \big(X(\tau,t_2)X(t_2,t_1)\big)^T C(\tau)^T C(\tau) \big(X(\tau,t_2)X(t_2,t_1)\big)\mathrm{d}\tau =$$

$$X(t_2,t_1)^T \left[\int_{t_2}^{t_3} X(\tau,t_2)^T C(\tau)^T C(\tau) X(\tau,t_2)\,\mathrm{d}\tau\right] X(t_2,t_1),$$

und dies ist gerade $X(t_2,t_1)^T M(t_2,t_3) X(t_2,t_1)$. Addition der beiden Integrale liefert die Behauptung.

Lösung (3.10) Wir imitieren den Beweis von Satz (2.9). Die Matrix

$$U \;:=\; \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

und damit auch die Matrix $U^T = (C^T \mid A^T C^T \mid \cdots \mid (A^T)^{n-1} V^T)$ hat nach Voraussetzung den Rang r. Wir wählen r linear unabhängige Spalten $v_1,\ldots,v_r$ von U und ergänzen diese zu einer Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $P := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)^{-1}$; dann gilt $Pv_i = e_i$ für $1 \le i \le n$. Für $1 \le i \le r$ ist dann $A^T v_i$ eine Spalte von $A^T U^T = (A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \cdots \mid (A^T)^n C^T)$ und damit auch von U^T, folglich eine Linearkombination von $v_1,\ldots,v_r$. Dann ist $PA^T v_i$ eine Linearkombination von $Pv_1 = e_1,\ldots,Pv_r = e_r$, so daß

$$PA^T P^{-1} \;=\; P(A^T v_1 \mid \cdots \mid A^T v_n) \;=\; \begin{bmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{bmatrix}$$

mit einer $(r\times r)$-Matrix in der linken oberen Ecke gilt. Ferner ist C^T eine Teilmatrix von U^T, so daß jede Spalte von C^T eine Linearkombination von $v_1,\ldots,v_r$ und damit jede Spalte von PC^T eine Linearkombination von $Pv_1 = e_1,\ldots,Pv_r = e_r$ ist; das bedeutet

$$PC^T \;=\; \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei $\star$ die ersten r Zeilen von PC^T abdeckt. Wir haben also

$$P^{T-1} A P^T \;=\; \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad CP^T \;=\; [\,C_1 \mid \star\,]$$

mit $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ und $C_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Wir setzen nun $Q := P^{T-1}$ und wählen die Koordinatentransformation $\xi := Qx$. Die Systemgleichungen $\dot{x} = Ax + Bu$ und $y = Cx$ gehen dann über in $\dot{\xi} = QAQ^{-1}\xi + QBu = P^{T-1}AP^T + P^{T-1}Bu$ und $y = CQ^{-1}\xi = CP^T\xi$. Diese Gleichungen sind von der Form

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad y = [\,C_1 \mid 0\,]\,\xi.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} r \;&=\; \mathrm{rk}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \;=\; \mathrm{rk}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_1A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &=\; \mathrm{rk}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_{11} \\ \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} \end{bmatrix} \;=\; \mathrm{rk}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_{11} \\ \vdots \\ C_1A_{11}^{r-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

so daß das Teilsystem $\dot{\xi}_1 = A_{11}\xi_1 + B_1 u$, $y = C_1\xi_1$ beobachtbar ist. Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung 1: Daß sich die Herleitung genauso ergibt wie der Beweis von Satz (2.9), ist kein Zufall, sondern ergibt sich daraus, daß "Steuerbarkeit" und "Beobachtbarkeit" zueinander duale Begriffe sind. (Siehe Aufgabe (3.12) weiter unten.)

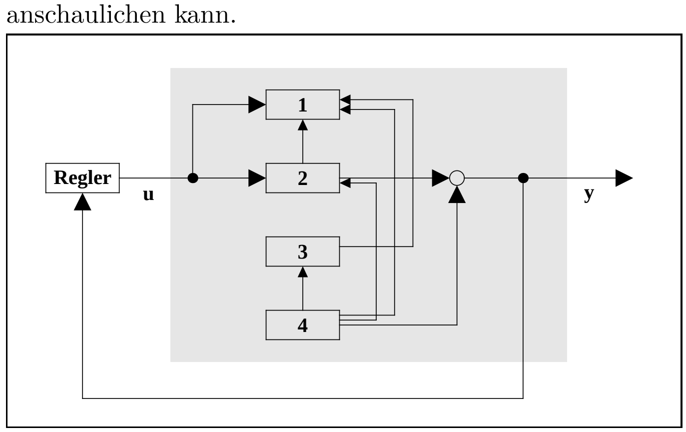
Bemerkung 2: Kombiniert man die Aussage dieser Aufgabe mit derjenigen von Satz (2.9), so erhält man die Aussage, daß ein lineares System mit konstanten Koeffizienten in vier Teilsysteme zerfällt, die die folgenden Eigenschaften haben:

(1) steuerbar, aber nicht beobachtbar;
(2) sowohl steuerbar als auch beobachtbar;
(3) weder steuerbar noch beobachtbar;
(4) beobachtbar, aber nicht steuerbar.

Jede solche Zerlegung wird als **Kalman-Zerlegung** des fraglichen Systems bezeichnet. Die Aussage bedeutet, daß das System nach einer geeigneten Koordinatentransformation eine Zustandsgleichung der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} \\ \dot{x}^{(3)} \\ \dot{x}^{(4)} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

und eine Meßgleichung der Form $y = C_2 x^{(2)} + C_4 x^{(4)}$ annimmt, was man folgendermaßen durch ein Schaltbild veranschaulichen kann.



Lösung (3.11) (a) Es gilt $x(t) = e^{tA}x(0)$ und somit $y(t) = Ce^{tA}x(0)$. Daher läßt sich $x(0)$ genau dann aus den Messungen $y(kT)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ermitteln, wenn die Matrix

$$\begin{bmatrix} C \\ Ce^{TA} \\ Ce^{2TA} \\ \vdots \\ Ce^{(n-1)TA} \end{bmatrix}$$

den Rang n hat (wobei n die Dimension des Zustandsraums ist).

(b) Mit $y := \dot{x}$ geht die Gleichung $\ddot{x} + x = 0$ über in

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Mit $C = (1, 0)$ und $T = \pi$ geht die in (a) angegebene Matrix daher über in

$$\begin{bmatrix} C \\ Ce^{\pi A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus den Werten $x(k\pi)$ lassen sich also $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ nicht ermitteln. (Das kann man auch sofort per Hand nachrechnen: Die allgemeine Lösung der Gleichung $\ddot{x} + x = 0$ ist $x(t) = x(0)\cos(t) + \dot{x}(0)\sin(t)$, und es gilt $y(k\pi) = x(0)\cos(k\pi) + \dot{x}(0)\sin(k\pi) = (-1)^k x(0)$, so daß $\dot{x}(0)$ in die Messungen gar nicht eingeht.)

Lösung (3.12) Ist $X(s,t)$ der Zustandsänderungsoperator des Systems $\dot{x} = Ax$, so ist $\xi(t,s) := X(t,s)^{T-1} = X(s,t)^T$ derjenige des Systems $\dot{x} = -A^T x$; dies folgt sofort aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\xi(t,s) &= (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)X(t,s)^{T-1} = \big((\mathrm{d}/\mathrm{d}t)X(t,s)^{-1}\big)^T \\
&= \big(-X(t,s)^{-1}\dot{X}(t,s)X(t,s)^{-1}\big)^T \\
&= \big(-X(t,s)^{-1}A(t)\big)^T = -A(t)^T X(t,s)^{T-1} \\
&= -A(t)^T \xi(t,s).
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die beiden Systeme $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ und $\dot{x} = -A^T x + C^T u, y = B^T x$. Die Steuerbarkeitsmatrix des ersten Systems ist

$$\begin{aligned}
W_1(s,t) &= \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \xi(\tau,t)^T B(\tau)^{TT} B(\tau)^T \xi(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \xi(s,t)^T \left(\int_s^t \xi(\tau,s)^T B(\tau)^{TT} B(\tau)\xi(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau \right) \xi(s,t) \\
&= \xi(s,t)^T\, M_2(s,t)\,\xi(s,t),
\end{aligned}$$

wenn M_2 die Beobachtbarkeitsmatrix des zweiten Systems bezeichnet. Analog ist die Beobachtbarkeitsmatrix des ersten Systems gegeben durch

$$\begin{aligned}
M_1(s,t) &= \int_s^t X(\tau,s)^T C(\tau)^T C(\tau) X(\tau,s)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \xi(s,\tau)C(\tau)^T C(\tau)^{TT}\xi(s,\tau)^T\,\mathrm{d}\tau \\
&= \xi(s,t)\left(\int_s^t \xi(t,\tau)C(\tau)^T C(\tau)^{TT}\xi(t,\tau)^T\,\mathrm{d}\tau \right)\xi(s,t)^T \\
&= \xi(s,t)\,W_2(s,t)\,\xi(s,t)^T,
\end{aligned}$$

wenn W_2 die Steuerbarkeitsmatrix des zweiten Systems bezeichnet. Für $\{i,j\} = \{1,2\}$ ist also $W_i(s,t)$ genau dann invertierbar, wenn $M_j(s,t)$ invertierbar ist; das eine System ist also genau dann steuerbar bzw. beobachtbar, wenn das jeweils andere System beobachtbar bzw. steuerbar ist.

Lösung (3.13) Das System $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ ist nach der vorigen Aufgabe genau dann vollständig beobachtbar, wenn das System $\dot{x} = -A^T x + C^T u$, $y = B^T x$ vollständig steuerbar ist, was nach dem Kalman-Kriterium genau dann der Fall ist, wenn die Matrix

$$\begin{aligned}
&[\, C^T \mid -A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \cdots \mid (-1)^{n-1}(A^T)^{n-1}C^T \,] \\
&= \begin{bmatrix} C \\ -CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}CA^{n-1} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

den Rang n hat, also genau dann, wenn die Matrix

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

den Rang n hat.

Lösung (3.14) Wir zeigen zunächst die Aussage $\widehat{X}(t,s) = P(t)X(t,s)P(s)^{-1}$, die anhand des folgenden kommutativen Diagramms auch sofort plausibel ist.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\widehat{X}(t,s)} & \mathbb{R}^n & \\
P(s) & \uparrow & & \uparrow & P(t) \\
 & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{X(t,s)} & \mathbb{R}^n &
\end{array}$$

Da offensichtlich $\widehat{X}(t,s) = P(s)X(s,s)P(s)^{-1} = \mathbf{1}$ gilt, müssen wir nur zeigen, daß $t \mapsto \widehat{X}(t,s)$ die definierende Gleichung des Zustandsänderungsoperators erfüllt. Nun gilt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\widehat{X}(t,s) &= \dot{P}(t)X(t,s)P(s)^{-1} + P(t)\dot{X}(t,s)P(s)^{-1} \\
&= \big(\dot{P}(t)X(t,s) + P(t)A(t)X(t,s)\big)P(s)^{-1} \\
&= \big(\dot{P}(t) + P(t)A(t)\big)X(t,s)P(s)^{-1} \\
&= \big(\dot{P}(t) + P(t)A(t)\big)P(t)^{-1}\widehat{X}(t,s) \\
&= \big(\dot{P}(t)P(t)^{-1} + P(t)A(t)P(t)^{-1}\big)\widehat{X}(t,s) \\
&= \widehat{A}(t)\widehat{X}(t,s).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen $\dot{x} = Ax + Bu$ und $y = Cx + Du$ gehen über in $\dot{\xi} = PAx + PBu$ und $y = CP^{-1}\xi + Du$; wir haben also

$$\widehat{A} = PA, \quad \widehat{B} = PB, \quad \widehat{C} = CP^{-1}, \quad \widehat{D} = F.$$

Setzen wir $P(s)X(s,\tau)P(\tau)^{-1}$ für $\widehat{X}(s,\tau)$ und CP^{-1} für $\widehat{C}$ ein, so ergibt sich die Steuerbarkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(t,s) \;&=\; \int_s^t \widehat{X}(s,\tau)\widehat{B}(\tau)\widehat{B}(\tau)^T\widehat{X}(s,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \big(P(s)X(s,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(s,\tau)^T P(s)^T\big)\mathrm{d}\tau \\
&= P(s)\left(\int_s^t X(s,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(s,\tau)^T \mathrm{d}\tau\right)P(s)^T \\
&= P(s)W(s,t)P(s)^T.
\end{aligned}$$

Setzen wir $P(\tau)X(\tau,s)P(s)^{-1}$ für $\widehat{X}(\tau,s)$ und PB für $\widehat{B}$ ein, so ergibt sich die Beobachtbarkeitsmatrix ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\widehat{M}(s,t) &= \int_s^t \widehat{X}(\tau,s)^T\widehat{C}(\tau)^T\widehat{C}(\tau)\widehat{X}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t P(s)^{T-1}X(\tau,s)C(\tau)^T C(\tau)X(\tau,s)\big)P^{-1}(s)\mathrm{d}\tau \\
&= P(s)^{T-1}\left(\int_s^t X(\tau,s)C(\tau)^T C(\tau)X(\tau,s)\mathrm{d}\tau\right)P(s)^{-1} \\
&= P(s)^{T-1}M(t,s)P(s)^{-1}.
\end{aligned}$$

Lösung (3.15) Es gilt $\dot{P} = -EX^{-1}\dot{X}X^{-1} = -EX^{-1}A$ und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{A} \;&=\; PAP^{-1} + \dot{P}P^{-1} \\
&= EX^{-1}AXE^{-1} - EX^{-1}AXE^{-1} \;=\; \mathbf{0}.
\end{aligned}$$