Lösung 2: Steuerbarkeit

Lösung (2.1) Wir nehmen an, es gebe eine Zeit $t_0 \in [a,b]$ mit $f(t_0) \neq 0$. Wegen $f \geq 0$ gilt dann $f(t_0) > 0$. Da f an der Stelle t_0 stetig oder zumindest links- oder rechtsseitig von t_0 stetig ist, gibt es ein Intervall $I \subseteq [a,b]$ mit $t_0 \in I$ mit einer Länge $\delta > 0$ derart, daß $f(t) \geq f(t_0)/2$ für alle $t \in I$ gilt. Wir erhalten dann

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_I \frac{f(t_0)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{f(t_0)}{2}\cdot\delta > 0$$

im Widerspruch dazu, daß doch $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ gelten sollten, Die Annahme, f sei nicht identisch Null, führt also auf einen Widerspruch.

Lösung (2.2) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
(Lu_1)(t) &= \int_0^t \begin{bmatrix} t & \tau \\ \tau & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} t\cos\tau + \tau\sin\tau \\ \tau\cos\tau + t\sin\tau \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \begin{bmatrix} t\sin\tau + \sin\tau - \tau\cos\tau \\ \cos\tau + \tau\sin\tau - t\cos\tau \end{bmatrix}\Bigg|_{\tau=0}^{t} \\
&= \begin{bmatrix} t\sin t + \sin t - t\cos t \\ \cos t + t\sin t - t\cos t - 1 + t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(Lu_2)(t) &= \int_0^t \begin{bmatrix} t & \tau \\ \tau & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20\tau^3 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} 20t\tau^3 + 2\tau \\ 20\tau^4 + 2t \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \begin{bmatrix} 5t\tau^4 + \tau^2 \\ 4\tau^5 + 2t\tau \end{bmatrix}\Bigg|_{\tau=0}^{t} \\
&= \begin{bmatrix} 5t^5 + t^2 \\ 4t^5 + 2t^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösung (2.3) Das Integral $\int_a^b \Phi(t)\,dt$ ist nach Definition der Grenzwert Riemannscher Summen der Form $\sum_{k=1}^r \Phi(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$, wobei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ eine Partition des Intervalls $[a,b]$ ist und $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ jeweils ein Punkt im k-ten Unterteilungsintervall. Da die Abbildung A linear ist, gilt für jede solche Riemannsche Summe die Gleichung

$$A\left(\sum_{k=1}^r \Phi(\tau_k)(t_k - t_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^r A\Phi(\tau_k)(t_k - t_{k-1}),$$

wobei auf der rechten Seite jetzt eine Riemannsche Summe für die Funktion $A\Phi$ steht. Da A als lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ automatisch stetig ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned}
A\left(\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right) &= A\left(\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^r \Phi(\tau_k)(t_k - t_{k-1})\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^r \Phi(\tau_k)\, t_k - t_{k-1})\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^r A\Phi(\tau_k)\, t_k - t_{k-1}) = \int_a^b A\Phi(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Lösung (2.4) (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
W(s,t)^T &= \left(\int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau\right)^T \\
&= \int_s^t \big(X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T\big)^T \mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t X(t,\tau)^{TT} B(\tau)^{TT} B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau = W(s,t).
\end{aligned}$$

Also ist $W(s,t)$ symmetrisch. Für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ gilt ferner

$$\begin{aligned}
\langle v, W(s,t)v\rangle &= v^T W(s,t) v \\
&= v^T \left(\int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau\right) v \\
&= \int_s^t v^T X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T v\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \|B(\tau)^T X(t,\tau)^T v\|^2 \mathrm{d}\tau \geq 0,
\end{aligned}$$

denn der Integrand auf der rechten Seite kann nur nichtnegative Werte annehmen. Also ist $W(s,t)$ positiv semidefinit.

(b) Daß $W(s,t)$ die Anfangsbedingung $W(s,s) = \mathbf{0}$ erfüllt, ist trivial; nur die Gültigkeit der angegebenen Differentialgleichung ist nachzuprüfen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot W(s,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\
&= X(t,t)B(t)B(t)^T X(t,t)^T \\
&\quad + \int_s^t \frac{\partial}{\partial t}\big(X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T\big)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Weil der Ausdruck $(\partial/\partial t)\big(X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T\big)$ durch

$$\begin{aligned}
&\dot X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T + X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T \dot X(t,T)^T \\
&= A(t)X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \\
&\quad + X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,T)^T A(t)^T
\end{aligned}$$

gegeben ist, bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\dot W(s,t) &= B(t)B(t)^T + A(t)\int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\
&\quad + \left(\int_s^t X(t,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t,T)^T\,\mathrm{d}\tau\right) A(t)^T \\
&= B(t)B(t)^T + A(t)W(s,t) + W(s,t)A(t)^T.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$W(t_1,t_3) \;=\; \left[\int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_3}\right] X(t_3,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t_3,\tau)^T.$$

Das zweite Integral $\int_{t_2}^{t_3}$ ist gerade $W(t_2,t_3)$. Das erste Integral formen wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} X(t_3,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t_3,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_1}^{t_2} X(t_3,t_2)X(t_2,\tau)B(\tau)B(\tau)^T \big(X(t_3,t_2)X(t_2,\tau)\big)^T \mathrm{d}\tau \\
&= X(t_3,t_2)\left(\int_{t_1}^{t_2}(t_2,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(t_2,\tau)^T \mathrm{d}\tau\right) X(t_3,t_2) \\
&= X(t_3,t_2)W(t_1,t_2)X(t_3,t_2)^T.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die angegebene Gleichung

$$W(t_1,t_3) \;=\; X(t_3,t_2)W(t_1,t_2)X(t_3,t_2)^T + W(t_2,t_3).$$

Lösung (2.5) In der Zeichnung ist a der vorgegebene Anfangszustand, z der Zielzustand und $\xi(t) := X(t,s)a + \int_s^t X(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ derjenige Zustand, den das System zur Zeit t annehmen würde, wenn man es sich selbst überließe, also nicht mit einer Steuerung in das System eingriffe. Die blaue Kurve zeigt also die Entwicklung des ungesteuerten Systems, die rote Kurve die Entwicklung des gesteuerten System; die Abweichung $z - \xi(t)$ ist durch die gesuchte Steuerung u zu kompensieren, was auf die folgende (im Skript angegebene) Gleichung führt:

$$z - \xi(t) \;=\; \int_s^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Lösung (2.6) Nach dem Kalman-Kriterium ist das betrachtete System genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix $(B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B)$ den Rang 4 hat. Da B bis auf einen von Null verschiedenen Skalarfaktor gleich $e_4 = (0,0,0,1)^T$ ist, ist dies genau denn der Fall, wenn die Matrix $(e_4 \mid Ae_4 \mid A^2e_4 \mid A^3e_4)$ den Rang 4 hat. Diese Matrix ist durch

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \dfrac{k_2}{m_1} \\
0 & 1 & -\dfrac{d_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} + \dfrac{d_2^2}{m_2^2} \\
0 & 0 & \dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{k_2 d_2}{m_1 m_2} - \dfrac{k_2(d_1+d_2)}{m_1^2} \\
1 & -\dfrac{d_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} + \dfrac{d_2^2}{m_2^2} & \dfrac{k_2 d_2}{m_2^2} + \dfrac{k_2 d_2}{m_1^2} - \dfrac{d_2^3}{m_2^3}
\end{bmatrix}$$

gegeben und hat die Determinante $-k_2^2/m_1^2 \neq 0$, ist also invertierbar und hat folglich den vollen Rang 4. Damit ist das betrachtete System für alle Parameterwerte m_i, k_i, d_i vollständig steuerbar.

Lösung (2.7) Für $m_1 = m_2 = 1$ und $d_1 = d_2 = 1$ erhalten wir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1+k_2) & k_2 & -2 & 1 \\ k_2 & -k_2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad\text{und}\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die Kalman-Matrix $K = (B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B)$ ist daher gegeben durch

$$K \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3-k_2 \\ 0 & -1 & 1 & k_2-2 \\ 0 & -1 & 3-k_2 & k_1+5k_2-8 \\ -1 & 1 & k_2-2 & 5-4k_2 \end{bmatrix}.$$

Das System ist nun genau dann vollständig steuerbar, wenn diese Matrix maximalen Rang hat, also invertierbar ist. Man rechnet schnell nach, daß

$$\det(K) \;=\; k_2 - k_1k_2 - k_1$$

gilt. Das System ist also genau dann **nicht** vollständig steuerbar, wenn $k_2 = k_1/(1-k_1)$ gilt (was nur für $k_1 \neq 1$ möglich ist).

Lösung (2.8) Wir wissen bereits, daß das Satellitensystem vollständig steuerbar ist, wenn Tangentialmanöver möglich sind; von Interesse ist also nur die Situation, daß nur Radialmanöver möglich sind. In diesem Fall haben wir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\text{und}\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Kalman-Matrix $K = (B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B)$ ist dann gegeben durch

$$K \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{bmatrix}$$

und hat den Rang 3. (Man sieht sofort, daß die ersten drei Spalten linear unabhängig sind, während die vierte Spalte das $(-\omega^2)$-fache der zweiten Spalte ist.) Wir ergänzen die ersten drei Spalten durch eine weitere Spalte (beispielsweise $(0,0,0,1)^T$) zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ und fassen die Basisvektoren als Spalten einer Transformationsmatrix P auf; deren Inverses bezeichnen wir mit

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\omega/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(2\omega) & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Durchmultiplizieren der Gleichung $\dot{x} = Ax + Bu$ mit P ergibt $P\dot{x} = PAx + PBu$, mit $y := Px$ also $\dot{y} = PAP^{-1}y + PBu = \widehat{A}y + \widehat{B}u$ mit

$$\widehat{A} := PAP^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\omega/2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/(2\omega) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\widehat{B} \;:=\; PB \;=\; \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Die Darstellung $\dot{y} = \widehat{A}y + \widehat{B}u$ zeigt sofort, daß $y_4 = 2\omega x_1 + x_4$ eine Erhaltungsgröße ist, die durch keine Wahl der Steuerung u beeinflußt werden kann.

Lösung (2.9) Das System ist genau dann nicht vollständig steuerbar, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet; diese ist gegeben durch

$$\det\begin{bmatrix} d_2/m_1 & \alpha \\ \alpha & \gamma\end{bmatrix} \;=\; \frac{d_2\gamma}{m_1} - \alpha^2.$$

Wir beobachten, daß für $d_2 = 0$ die Determinante gegeben ist durch $-\alpha^2 = -k_2^2/m_1^2 \neq 0$. Wenn also die zweite Feder ungedämpft ist, ist das System in jedem Fall vollständig steuerbar. Wir dürfen daher $d_2 \neq 0$ und $\alpha^2 = d_2\gamma/m_1$ annehmen. Dann sind die ersten drei Spalten der Kalman-Matrix linear unabhängig und können durch die Spalte $(0,0,1,0)^T$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden. Setzen wir

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_2/m_1 & 0 \\ 0 & 1 & -d_2/m_2 & 0 \\ 0 & d_2/m_1 & \alpha & 1 \\ 1 & -d_2/m_1 & \beta & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

sowie $\widehat{A} := PAP^{-1}$ und $\widehat{B} := PB$, so ist die letzte Zeile von $\widehat{A}$ von der Form $(0,0,0,\star)$, und es gilt $\widehat{B}_4 = 0$, so daß mit $y := Px$ der Ausdruck $\dot{y}_4 - \widehat{A}_{44}y_4$ nicht durch die Steuerung u beeinflußt werden kann.

Lösung (2.10) Mit den Bezeichnungen der Vorlesung haben wir $A = (a)$, $B = (-1)$, $g = 0$, $s = 0$, $t = T$ und damit $\xi(T) = e^{Ta}x_0$ sowie $X(T,\tau) = e^{(T-\tau)a}$. Als Steuerbarkeitsmatrix ergibt sich

$$\begin{aligned} W(0,T) \;&=\; \int_0^T X(T,\tau)B(\tau)B(\tau)^T X(T,\tau)^T \mathrm{d}\tau \\ &=\; \int_0^T e^{2(T-\tau)a}\mathrm{d}\tau \;=\; \left[\frac{e^{2(T-\tau)a}}{-2a}\right]_{\tau=0}^T \;=\; \frac{e^{2Ta}-1}{2a}.\end{aligned}$$

Die optimale Steuerung ist dann gegeben durch die Formel $(\star)$ in Satz (2.4). Diese Formel liefert

$$\begin{aligned} u(\tau) \;&=\; -e^{(T-\tau)a}\cdot\frac{2a}{e^{2Ta}-1}\cdot(0 - e^{Ta}x_0) \\ &=\; \frac{2ax_0}{e^{2Ta}-1}\cdot e^{(2T-\tau)a} \;=\; \frac{2ax_0e^{2Ta}}{e^{2Ta}-1}\cdot e^{-\tau a}.\end{aligned}$$

Die optimale Steuerung ist also von der Form $u(\tau) = u_0e^{-\tau a}$; d.h., die Abgaberate des Insektizids muß exponentiell abnehmen, wenn bei vorgegebener Wirkung der angerichtete Umweltschaden minimiert werden soll.

Lösung (2.11) Da die Koeffizientenmatrix konstant ist, ist der Zustandsänderungsoperator durch die Exponentialfunktion für Matrizen gegeben; es gilt also

$$\begin{aligned} X(t,s) \;&=\; \exp\left((t-s)\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}\right) \\ &=\; \begin{bmatrix}\cos\big(\omega(t-s)\big) & \sin\big(\omega(t-s)\big) \\ -\sin\big(\omega(t-s)\big) & \cos\big(\omega(t-s)\big)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Schreiben wir zur Abkürzung $S := \sin\big(\omega(t-\tau)\big)$ und $C := \cos\big(\omega(t-\tau)\big)$, so ist die gesuchte Steuerbarkeitsmatrix $W(0,t) = \int_0^t X(t,\tau)BB^TX(t,\tau)^T\mathrm{d}\tau$ wegen

$$BB^T \;=\; \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

gegeben durch

$$\int_0^t\begin{bmatrix}C & S\\ -S & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & -S\\ S & C\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau = \int_0^t\begin{bmatrix}S^2 & SC\\ SC & C^2\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau.$$

Unter Benutzung der Formeln $\sin^2\varphi = \big(1-\cos(2\varphi)/2$, $\cos^2\varphi = \big(1+\cos(2\varphi)\big)/2$ und $\sin\varphi\cos\varphi = \sin(2\varphi)/2$ ergibt sich $W(0,t)$ zu

$$\begin{aligned} &\int_0^t\begin{bmatrix}1-\cos\big(2\omega(t-\tau)\big) & \sin\big(2\omega(t-\tau)\big)\\ \sin\big(2\omega(t-\tau)\big) & 1+\cos\big(2\omega(t-\tau)\big)\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \\ &=\; \frac{1}{4\omega}\left[\begin{bmatrix}2\omega\tau+\sin\big(2\omega(t-\tau)\big) & \cos\big(2\omega(t-\tau)\big)\\ \cos\big(2\omega(t-\tau)\big) & 2\omega\tau-\sin\big(2\omega(t-\tau)\big)\end{bmatrix}\right]_{\tau=0}^t \\ &=\; \frac{1}{4\omega}\begin{bmatrix}2\omega t-\sin(2\omega t) & 1-\cos(2\omega t)\\ 1-\cos(2\omega t) & 2\omega t-\sin(2\omega t)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Lösung (2.12) Mit $\omega = 1$ und $T = 2\pi$ ergibt sich aus der vorigen Aufgabe die Steuerbarkeitsmatrix

$$W(0,2\pi) \;=\; \begin{bmatrix}\pi & 0\\ 0 & \pi\end{bmatrix}.$$

Da diese Matrix invertierbar ist, kann innerhalb des Zeitintervalls $[0,2\pi]$ jeder Anfangszustand $\big($insbesondere also der Anfangszustand $\big(x(0),y(0)\big) = (1,0)\big)$ durch geeignete Wahl einer (stetigen) Steuerung in einen beliebig vorgegebenen Zielzustand $\big($insbesondere also den Zielzustand $\big(x(2\pi),y(2\pi)\big) = (0,0)\big)$ überführt werden. Es soll nun untersucht werden, ob dieser Übergang auch durch eine spezielle (stückweise konstante) Steuerung der Form

$$(\star)\qquad u(t) \;=\; \begin{cases} u_1, & \text{falls } 0 \le t < 2\pi/3,\\ u_2, & \text{falls } 2\pi/3 \le t < 4\pi/3\\ u_3, & \text{falls } 4\pi/3 \le t \le 2\pi\end{cases}$$

mit geeigneten Konstanten u_i bewerkstelligt werden kann. Das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u, \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{bmatrix} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Für $t = 2\pi$ ergibt sich hieraus

$$\begin{bmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \end{bmatrix} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Für die Steuerung $(\star)$ geht dieser Ausdruck über in

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix}_0^{2\pi/3} + u_2 \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix}_{2\pi/3}^{4\pi/3} + u_3 \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix}_{4\pi/3}^{2\pi} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{u_1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} - u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \frac{u_3}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Die Frage ist also, ob das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eine Lösung besitzt. Das ist der Fall; die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2/3)+u_3 \\ (1/3)+u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei u_3 beliebig wählbar ist.

Lösung (2.13) Für die Koeffizientenmatrix $A = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{bmatrix}$ erhalten wir

$$A^{2n} = (-1)^n \begin{bmatrix} Q^{2n} & 0 \\ 0 & Q^{2n} \end{bmatrix}$$

und

$$A^{2n+1} = (-1)^n \begin{bmatrix} 0 & Q^{2n+1} \\ -Q^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\begin{bmatrix} Q^{2n} & 0 \\ 0 & Q^{2n} \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{bmatrix} 0 & Q^{2n+1} \\ -Q^{2n+1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(tQ) & 0 \\ 0 & \cos(tQ) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin(tQ) \\ -\sin(tQ) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(tQ) & \sin(tQ) \\ -\sin(tQ) & \cos(tQ) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Schreiben wir zur Abkürzung $S := \sin\big((t-\tau)Q\big)$ und $C := \cos\big((t-\tau)Q\big)$, so ist die Steuerbarkeitsmatrix des Systems damit gegeben durch

$$\begin{aligned} W(s,t) &= \int_s^t \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_s^t \begin{bmatrix} SBB^TS & SBB^TC \\ CBB^TS & CBB^TC \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

(Beachte, daß dies eine symmetrische Matrix ist, weil wegen $Q^T = Q$ die Matrizen S und C ebenfalls symmetrisch sind.) Wegen

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} SBB^TS & SBB^TC \\ CBB^TS & CBB^TC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \|B^T(Sv+Cw)\|^2$$

besteht der Kern von $W(s,t)$ genau aus denjenigen Vektoren $(v,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, für die $S(\tau)v + C(\tau)w$ für alle $\tau \in [s,t]$ im Kern von B^T liegt. Genau dann ist also das System vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$(\star) \qquad B^T\big(S(\tau)v + C(\tau)w\big) = 0 \quad \text{für alle } \tau \in [s,t]$$

nur für $v = w = 0$ erfüllt ist. Wir behaupten, daß dies genau dann der Fall ist, wenn die Matrix B invertierbar ist.

Zunächst sei B invertierbar, und es gelte Bedingung $(\star)$. Wählen wir $\tau := t$, so folgt $w = 0$. Dann gilt $S(\tau)v = 0$ für alle $\tau \in [s,t]$, nach Ableiten also $-QC(\tau)v = 0$ für alle $\tau \in [s,t]$ und für $\tau := t$ insbesondere $-Qv = 0$, folglich $v = 0$ und insgesamt daher $v = w = 0$. Umgekehrt sei B nicht invertierbar. Es gibt dann einen Vektor $u \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ mit $B^Tu = 0$. Es sei $\tau \in [s,t]$ beliebig. Für $A := \big(S(\tau), C(\tau)\big) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ gilt wegen

$$AA^T = \begin{bmatrix} S(\tau) & C(\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S(\tau) \\ C(\tau) \end{bmatrix} = S(\tau)^2 + C(\tau)^2 = \mathbf{1}$$

dann $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(AA^T) = n$, so daß A surjektiv ist. Insbesondere gibt es daher Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u = A\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S(\tau) & C(\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = S(\tau)v + C(\tau)w,$$

woraus wegen $u \neq 0$ dann $(v,w) \neq (0,0)$ folgt. Also ist bei nicht invertierbarem B die Bedingung $(\star)$ nicht nur für $v = w = 0$ erfüllt.