Lösung 1: Gesteuerte dynamische Systeme

Lösung (1.1) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) \;=\; a\,x(t) - u(t), \quad x(0) \;=\; x_0$$

ist gegeben durch

$$x(T) \;=\; e^{aT}\left(x_0 - \int_0^T e^{-at}u(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Bei den angegebenen Familien von Steuerungen sind dann die drei Parameter A, B, C so zu wählen, daß die Bedingung $x(T) = 0$ erfüllt ist.

(a) Für $u(t) = A + Bt + Ct^2$ geht die Bedingung $x(T) = 0$ über in

$$\begin{aligned} x_0 \;&=\; A\int_0^T e^{-at}\mathrm{d}t + B\int_0^T te^{-at}\mathrm{d}t + C\int_0^T t^2e^{-at}\mathrm{d}t \\ &=\; A\cdot\frac{1-e^{-aT}}{a} + B\cdot\frac{1-e^{-aT}(1+aT)}{a^2} \\ &\qquad + C\cdot\frac{2-e^{-aT}(2+aT(2+aT)}{a^3}. \end{aligned}$$

Je zwei der Konstanten A, B, C können dabei beliebig gewählt werden; die dritte ergibt sich dann aus dieser Gleichung. (Die Wahl $B := C := 0$ liefert beispielsweise die konstante Steuerung $u(t) \equiv A := ax_0/(1 - e^{-aT})$.)

(b) Für $u(t) = A\cos(Ct) + B\sin(Ct)$ geht die Bedingung $x(T) = 0$ über in

$$\begin{aligned} x_0 \;&=\; A\int_0^T e^{-at}\cos(Ct)\,\mathrm{d}t + B\int_0^T e^{-at}\sin(Ct)\,\mathrm{d}t \\ &=\; A\cdot\frac{a - ae^{-aT}\cos(CT) + Ce^{-aT}\sin(CT)}{a^2+C^2} \\ &\qquad + B\cdot\frac{C - Ce^{-aT}\cos(CT) - ae^{-aT}\sin(CT)}{a^2+C^2} \end{aligned}$$

(c) Für $u(t) = Ae^{Bt} + C$ geht die Bedingung $x(T) = 0$ über in

$$\begin{aligned} x_0 \;&=\; A\int_0^T e^{-at}e^{Bt}\mathrm{d}t + C\int_0^T e^{-at}\mathrm{d}t \\ &=\; A\cdot\frac{e^{(B-a)T}-1}{B-a} + C\cdot\frac{1-e^{-aT}}{a}. \end{aligned}$$

Lösung (1.2) (a) Für $u(t) = A + Bt + Ct^2$ ist $\int_0^T u(t)^2\mathrm{d}t$ gegeben durch

$$TA^2 + T^2AB + \frac{T^3B^2}{3} + \frac{2T^3AC}{3} + \frac{T^4BC}{2} + \frac{T^5C^2}{5}.$$

Ersetzen wir eine der drei Variablen A, B, C aus der Bedingung in Lösung (1.1)(a), so geht dieser Ausdruck in ein quadratisches Polynom in den beiden anderen Variablen über, dessen Minimum sich durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach diesen beiden Variablen ermitteln läßt. Die etwas mühselige Rechnung ersparen wir uns.

Die vermutlich eleganteste Lösung besteht darin, die Funktion $f(A,B,C) := \int_0^T (A+Bt+Ct^2)^2\mathrm{d}t$ unter der Nebenbedingung $0 = \int_0^T (A+Bt+Ct^2)e^{-at}\mathrm{d}t - x_0 =: g(A,B,C)$ zu minimieren. (Die Existenz eines Minimums ist dabei unproblematisch, weil f eine positiv definite quadratische Form ist, die auf eine Ebene eingeschränkt wird.) Nach dem Satz von Lagrange gibt es für das gesuchte Minimum (A,B,C) einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(\nabla f)(A,B,C) = \lambda\cdot(\nabla g)(A,B,C)$. Mit $\mu := \lambda/2$ bedeutet dies

$$\begin{bmatrix} \int_0^T (A+Bt+Ct^2)\cdot 1\,\mathrm{d}t \\ \int_0^T (A+Bt+Ct^2)\cdot t\,\mathrm{d}t \\ \int_0^T (A+Bt+Ct^2)\cdot t^2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} \;=\; \mu\begin{bmatrix} \int_0^T e^{-at} \\ \int_0^T te^{-at}\mathrm{d}t \\ \int_0^T t^2e^{-at}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} T & T^2/2 & T^3/3 \\ T^2/2 & T^3/3 & T^4/4 \\ T^3/3 & T^4/4 & T^5/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \;=\; \mu\begin{bmatrix} \int_0^T e^{-at} \\ \int_0^T te^{-at}\mathrm{d}t \\ \int_0^T t^2e^{-at}\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

Die optimale Lösung (A,B,C) kann also folgendermaßen gefunden werden: Wir berechnen

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \;:=\; \begin{bmatrix} T & T^2/2 & T^3/3 \\ T^2/2 & T^3/3 & T^4/4 \\ T^3/3 & T^4/4 & T^5/5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \int_0^T e^{-at} \\ \int_0^T te^{-at}\mathrm{d}t \\ \int_0^T t^2e^{-at}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

und setzen dann

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \;=\; \mu\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix},$$

wobei sich μ aus der Nebenbedingung $x(T) = 0$ ergibt, die in unserem Fall die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} x_0 \;&=\; \int_0^T (A+Bt+Ct^2)e^{-at}\mathrm{d}t \\ &=\; \mu\cdot\int_0^T (C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-at}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(b) Für $u(t) = A\cos(Ct) + B\sin(Ct)$ ist $\int_0^T u(t)^2\mathrm{d}t$ durch

$$\frac{AB + TC(A^2+B^2) - AB\cos(2TC) + (A^2-B^2)\sin(2TC)/2}{4C}$$

gegeben. Eliminieren wir A oder B aus der Bedingung in Lösung (1.2)(c), so geht dieser Ausdruck in eine Funktion von zwei Variablen (B und C bzw. A und C) über, deren Minimum wir suchen müssen. Stattdessen verwenden wir wieder die Methode von Lagrange, um die Funktion $f(A,B,C) := \int_0^T \big(A\cos(Ct) + B\sin(Ct)\big)^2\mathrm{d}t$ unter der

Nebenbedingung $0 = \int_0^T \big(A\cos(Ct) + B\sin(Ct)\big)e^{-at}\mathrm{d}t - x_0 =: g(A,B,C)$ zu minimieren. Nach Lagrange setzen wir $(\nabla f)(A,B,C) = \lambda(\nabla g)(A,B,C)$ an; mit $\mu := \lambda/2$ sind die die drei Komponenten dieser Vektorgleichung gegeben durch

$$\int_0^T \big(A\cos(Ct)^2 + B\sin(Ct)\cos(Ct)\big)\mathrm{d}t = \mu\int_0^T \cos(Ct)e^{-at}\mathrm{d}t,$$

durch

$$\int_0^T \big(A\sin(Ct)\cos(Ct) + B\sin(Ct)^2\big)\mathrm{d}t = \mu\int_0^T \sin(Ct)e^{-at}\mathrm{d}t$$

und durch

$$\int_0^T t\big(AB(\cos(Ct)^2 - \sin(Ct)^2) + (B^2 - A^2)\sin(Ct)\cos(Ct)\big)\mathrm{d}t$$
$$= \mu\int_0^T t\big(-A\sin(Ct) + B\cos(Ct)\big)e^{-at}\mathrm{d}t.$$

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich (nach Berechnen der Integrale) zu der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} CT + \sin(CT)\cos(CT) & \sin(CT)^2 \\ \sin(CT)^2 & CT - \sin(CT)\cos(CT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$
$$= \frac{2C\mu e^{-aT}}{a^2 + C^2} \begin{bmatrix} ae^{aT} - a\cos(CT) + C\sin(CT) \\ Ce^{aT} - C\cos(CT) - a\sin(CT) \end{bmatrix}$$

zusammenfassen. Die Koeffizientendeterminante ist $d := (CT)^2 - \sin(CT)^2$. Wir können nun von links mit der zur Koeffizientenmatrix inversen Matrix

$$\frac{1}{d}\begin{bmatrix} CT - \sin(CT)\cos(CT) & -\sin(CT)^2 \\ -\sin(CT)^2 & CT + \sin(CT)\cos(CT) \end{bmatrix}$$

durchmultiplizieren, dadurch A und B durch C (und μ) ausdrücken und das Ergebnis in die dritte Gleichung einsetzen, die dann eine Bestimmungsgleichung für C liefert. Diese Gleichung ist aber so schlimm, daß wir uns mit Schaudern von dieser Aufgabe abwenden und unser Glück lieber mit Teil (c) versuchen.

(c) Für $u(t) = Ae^{Bt} + C$ ist $\int_0^T u(t)^2\mathrm{d}t$ gegeben durch

$$\frac{4AC(e^{BT} - 1) + A^2(e^{2BT} - 1) + 2TBC^2}{2B}.$$

Eliminieren wir A oder C aus der Bedingung in Lösung (1.1)(c), so geht dieser Ausdruck in eine Funktion von zwei Variablen (B und C bzw. B und A) über, deren Minimum wir suchen müssen. Verwenden wir stattdessen wieder die Methode von Lagrange, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \int_0^T (Ae^{2Bt} + Ce^{Bt})\mathrm{d}t \\ A\int_0^T (Ate^{2Bt} + Cte^{Bt})\,\mathrm{d}t \\ \int_0^T (Ae^{Bt} + C)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \int_0^T e^{(B-a)t}\mathrm{d}t \\ A\int_0^T te^{(B-a)t}\mathrm{d}t \\ \int_0^T e^{-at}\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

Da wir den Trivialfall $A = 0$ ausschließen dürfen (der Fall einer konstanten Steuerung wurde ja bereits in Teil (a) mitbehandelt), dürfen wir die zweite Komponente dieser Vektorgleichung durch A teilen. Bringen wir dann alle Terme auf die linke Seite, so entsteht ein Ausdruck, der linear in A, C und μ ist; als resultierende Gleichung ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \int_0^T e^{2Bt}\mathrm{d}t & \int_0^T e^{Bt}\mathrm{d}t & -\int_0^T e^{(B-a)t}\mathrm{d}t \\ \int_0^T te^{2Bt}\mathrm{d}t & \int_0^T te^{Bt}\mathrm{d}t & -\int_0^T te^{(B-a)t}\mathrm{d}t \\ \int_0^T e^{Bt}\mathrm{d}t & T & -\int_0^T e^{-at}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wäre die Koeffizientendeterminante von Null verschieden, so hätte dieses homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung $(A,C,\mu) = (0,0,0)$ und damit $u \equiv 0$, was nicht sein kann. Also muß die Koeffizientendeterminante verschwinden, und dies ist eine Bestimmungsgleichung für B. Eine mühsame Rechnung liefert $B = -a$. (Man erkennt sofort, daß für $B = -a$ die erste und die dritte Spalte der obigen Koeffizientenmatrix sich nur im Vorzeichen unterscheiden!) Das betrachtete homogene Gleichungssystem hat dann als Lösungsmenge die Menge aller Vektoren $(A,C,\mu)^T$ mit $C = 0$ und $\mu = A$. Die gesuchte Steuerung der Form $u(t) = Ae^{Bt} + C$, für die $\int_0^T u(t)^2\mathrm{d}t$ minimal wird, ist also gegeben durch $u(t) = Ae^{-at}$, wobei sich der Wert von A aus der Bedingung $\int_0^T u(t)e^{-at}\mathrm{d}t = x_0$ ergibt.

Lösung (1.3) Die Funktion $c(t) := \int_0^t u(\tau)^2\mathrm{d}\tau$ beschreibt den bis zum (variablen) Zeitpunkt t entstandenen Umweltschaden. Die Funktion $t \mapsto \big(x(t), c(t)\big)$ erfüllt das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - u \\ u^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für jede Steuerung u, die die Zielvorgabe $x_u(T) = 0$ erfüllt, verläuft die Projektion der Kurve $t \mapsto \big(t, x(t), c(t)\big)$ auf die tx-Ebene vom Punkt $(0, x_0)$ zum Punkt $(T, 0)$, während die dritte Komponente den entstehenden Umweltschaden aufzeichnet. Wenn wir verschiedene (zulässige) Steuerungen vergleichen, ist also diejenige besser, für die $c(T)$ am kleinsten ist, für die also die Kurve $t \mapsto \big(t, x(t), c(t)\big)$ die senkrechte Gerade $\{T\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ in möglichst geringer Höhe trifft.

Lösung (1.4) Das betrachtete Anfangswertproblems

$$\dot{g}(t) \;=\; L\big(u(t)c\big)g(t), \quad g(0) \;=\; g_0$$

hat die eindeutige Löung

$$g(t) \;=\; \exp\big(U(t)L(c)\big)g_0$$

mit $U(t) := \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Die Bedingung $g(T) = g_1$ führt dann auf die Bestimmungsgleichung

$$\exp\big(U(T)L(c)\big) \;=\; g_1 g_0^{-1}.$$

Bestimmen wir den Drehvektor φ und die Drehachsenrichtung n der Rotationsmatrix $g_1 g_0^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$, so haben wir $\exp\big(U(T)L(c)\big) = D(n,\varphi) = \exp\big(\varphi L(n)\big)$; die Wahl $c := n$ und $U(T) := \varphi$ führt also zum Ziel (und ist auch im wesentlichen eindeutig). Wir können also eine beliebige Funktion v mit $v(0) = v(T) = 0$ wählen (beispielsweise $v(t) = t(T-t)$ oder $v(t) = \sin(t\pi/T)$) und dann $u(t) := Au(t)$ mit eine Konstanten A wählen, die durch die Bedingung $\varphi = U(T) = \int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = A\cdot\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ bestimmt wird.

Lösung (1.5) Die Systemgleichung lautet

$$\begin{bmatrix} \dot M(t) \\ \dot B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(t) \\ B(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix mit A, so ist die Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$(\star)\quad \begin{bmatrix} M(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\left(\begin{bmatrix} M(0) \\ B(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-\tau A} \begin{bmatrix} D(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \right).$$

Für $a \neq b$ gilt

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} =: D \quad \text{mit} \quad P := \begin{bmatrix} b-a & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

und damit $\exp(tA) = \exp(tPDP^{-1}) = P\exp(tD)P^{-1}$, also

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} b-a & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ta} & 0 \\ 0 & e^{-tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & b-a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-ta} & 0 \\ a(e^{-ta}-e^{-tb})/(b-a) & e^{-tb} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für $b = a$ ist dies (im Sinne der Regel von de l'Hospital) als

$$e^{tA} = e^{-ta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ at & 1 \end{bmatrix}$$

zu interpretieren (was man auch direkt durch Hinschreiben der Exponentialreihe nachprüfen kann, die in diesem Fall auf eine Summe mit nur zwei Termen zusammenschrumpft). Die Formel $(\star)$, die die allgemeine Lösung angibt, ist bequem, wenn die Funktion $t \mapsto D(t)$ durch einen geschlossenen Ausdruck gegeben ist. In unserem Fall ist D stückweise definiert; daher ist eine andere Darstellung etwas bequemer. Während eines beliebigen Zeitintervalls $[t_1, t]$ gilt
$(\star\star)$

$$e^{-tA} \begin{bmatrix} M(t) \\ B(t) \end{bmatrix} - e^{-t_1 A} \begin{bmatrix} M(t_1) \\ B(t_1) \end{bmatrix} = \int_{t_1}^{t} D(\tau) e^{-\tau A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau.$$

Ist nun $[t_1, t_2]$ ein Zeitintervall, in dem kein Medikament verabreicht wird ($D \equiv 0$), so gilt für $t_1 \le t \le t_2$ gemäß $(\star\star)$ die Gleichung

$$\begin{bmatrix} M(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = \exp\big((t-t_1)A\big) \begin{bmatrix} M(t_1) \\ B(t_1) \end{bmatrix}.$$

Ist dagegen $[t_1, t_2]$ ein Zeitintervall, in dem die konstante Dosis $D(t) \equiv d > 0$ verabreicht wird, so gilt gemäß $(\star\star)$ für $t_1 \le t \le t_2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} &\exp(-tA) \begin{bmatrix} M(t) \\ B(t) \end{bmatrix} - \exp(-t_1 A) \begin{bmatrix} M(t_1) \\ B(t_1) \end{bmatrix} \\ &= d \int_{t_1}^{t} \begin{bmatrix} e^{\tau a} \\ a(e^{\tau a}-e^{\tau b})/(b-a) \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= d \begin{bmatrix} (e^{ta} - e^{t_1 a})/a \\ \big(b(e^{ta} - e^{t_1 a}) - a(e^{tb}-e^{t_1 b})\big)/\big(b(b-a)\big) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Benutzen wir die in der Aufgabe angegebenen numerischen Werte, so ergeben sich die folgenden Diagramme für die Verläufe der Funktionen $t \mapsto M(t)$ (blau) sowie $t \mapsto B(t)$ (rot).

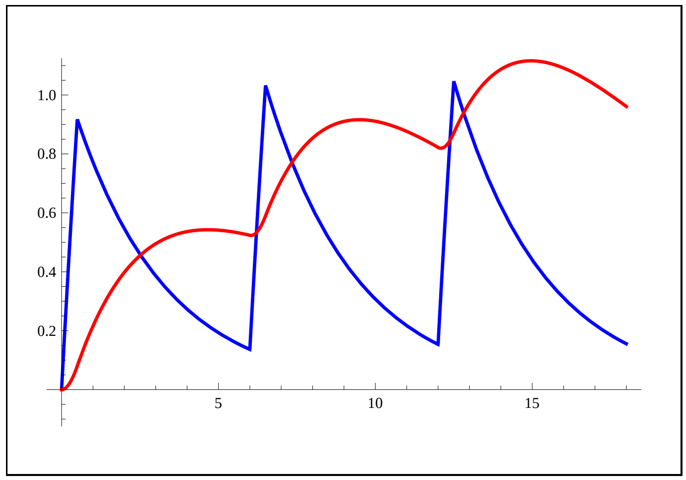

Abb. 1.6: Zeitlicher Verlauf der Konzentration des Medikaments im Magen-Darm-Trakt (blau) und im Blutkreislauf (rot).

Lösung (1.6) (a) Die Differentialgleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \dot x_1(t) &= -a\,x_1(t) + 2c\,x_3(t) \\ \dot x_2(t) &= a\,x_1(t) - b\,x_2(t) \\ \dot x_3(t) &= b\,x_2(t) - c\,x_3(t) \end{aligned}$$

mit dem Faktor 2 in der ersten Zeile, weil aufgrund der Zellteilung für jede Zelle, die das dritte Kompartiment verläßt, im ersten Kompartiment zwei neue Zellen hinzukommen.

(b) Das gesteuerte System ist gegeben durch das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \dot x_1(t) &= -a\,x_1(t) + 2c\,x_3(t)\big(1-u(t)\big) \\ \dot x_2(t) &= a\,x_1(t) - b\,x_2(t)\big(1 - v(t)\big) \\ \dot x_3(t) &= b\,x_2(t)\big(1-v(t)\big) - c\,x_3(t) \end{aligned}$$

In Matrixform läßt sich dies schreiben als

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \\ \dot x_3 \end{bmatrix} = (A + uB + vC) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & 2c \\ a & -b & 0 \\ 0 & b & -c \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}.$$