7. Lösung zu algebraischen Strukturen: Normalteiler und Quotientengruppen

Lösung (7.1) Es sei $f : G \to G$ ein Automorphismus von G. Liegt $g \in G$ im Zentrum von G, dann auch $f(g)$, denn aus $gx = xg$ für alle $x \in G$ folgt $f(g)f(x) = f(gx) = f(xg) = f(x)f(g)$ für alle $x \in G$ und wegen der Surjektivität von f daher $f(g)y = yf(g)$ für alle $y \in G$. Also ist $Z(G)$ eine charakteristische Untergruppe von G. Liegt $g \in G$ in G', so ist g ein Produkt von Elementen der Form $xyx^{-1}y^{-1}$. Dann ist aber $f(g)$ das Produkt der zugehörigen Elemente $f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$ und damit ebenfalls ein Produkt von Elementen der Form $\xi\eta\xi^{-1}\eta^{-1}$. Mit g liegt also auch $f(g)$ in G', so daß G' eine charakteristische Untergruppe von G ist.

Lösung (7.2) (a) Die Aussage $[G : U] = 2$ besagt, daß es genau zwei (Links-)Nebenklassen von U in G gibt. Eine davon ist U; die andere ist g_0U mit einem Element $g_0 \in G\setminus U$. Da G die disjunkte Vereinigung von U und g_0U ist, gilt daher $g_0U = G \setminus U$. Für ein beliebiges Element $g \in G$ gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} gU = g_0U \;&\Leftrightarrow g_0^{-1}g \in U \;\Leftrightarrow\; g_0^{-1}g \in U \\ &\Leftrightarrow\; g \notin U \;\Leftrightarrow\; g \in G \setminus U. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$gU \;=\; \begin{cases} U, & \text{falls } g \in U; \\ G \setminus U, & \text{falls } g \notin U. \end{cases}$$

Vollkommen analog gilt

$$Ug \;=\; \begin{cases} U, & \text{falls } g \in U; \\ G \setminus U, & \text{falls } g \notin U. \end{cases}$$

In jedem der beiden möglichen Fälle $g \in U$ und $g \notin U$ gilt also $gU = Ug$; damit ist U als Normalteiler nachgewiesen.

(b) Es sei G die Gruppe aller Drehungen D_φ und aller Spiegelungen S_φ in der Ebene, und es sei U die Untergruppe aller Drehungen. (Vgl. Aufgabe (1.3).) Jedes Element von G hat die Determinante ± 1, und wir haben

$$\begin{aligned} U \;&=\; \{g \in G \mid \det(g) = +1\} \quad \text{und} \\ G \setminus U \;&=\; \{g \in G \mid \det(g) = -1\}. \end{aligned}$$

Nach (a) ist U ein Normalteiler von G. Das folgt auch durch direktes Nachrechnen, denn für alle Winkel α und φ gilt $S_\varphi^{-1} D_\alpha S_\varphi = S_\varphi S_{\alpha+\varphi} = D_{\varphi-(\alpha+\varphi)} = D_{-\alpha}$. Ein weiteres Beispiel ist gegeben durch die symmetrische Gruppe $G = \mathrm{Sym}_n$ und die alternierende Gruppe $U = \mathrm{Alt}_n$. Ein drittes Beispiel ist gegeben durch die

$$G = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, d > 0\} \cup \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid b, c > 0\}$$

und die Untergruppe

$$U \;=\; \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, d > 0\},$$

die uns in (2.5)(b) begegnet sind.

Lösung (7.3) (a) Es sei U eine Untergruppe einer abelschen Gruppe G. Für alle $u \in U$ gilt dann $gu = ug$; erst recht gilt also $gU = Ug$, so daß U ein Normalteiler von G ist.

(b) Die Quaternionengruppe ist nicht abelsch. Sie hat nach Aufgabe (4.9) vier echte Untergruppen. Drei davon haben die Ordnung 4 und sind daher Normalteiler nach Aufgabe (7.2). Die vierte echte Untergruppe ist $\{\pm\mathbf{1}\}$; dies ist gerade das Zentrum der Quaternionengruppe und daher ebenfalls ein Normalteiler.

Lösung (7.4) Es sei $\sigma : G \to G$ ein Automorphismus von G. Dann ist $\sigma(U)$ eine zu U gleichmächtige Untergruppe von G. Nach Voraussetzung ist aber U die einzige Untergruppe mit der Mächtigkeit $|U|$; also gilt $\sigma(U) = U$. Wir sehen, daß $\sigma(U) = U$ für jeden Automorphismus von G gilt; das bedeutet gerade, daß U eine charakteristische Untergruppe von G ist.

Lösung (7.5) (a) Es sei $f : C \to C$ ein Automorphismus von C. Da B charakteristisch in C ist, gilt $f(B) \subseteq B$. Also ist $f|_B : B \to B$ ein Automorphismus von B. Da A charakteristisch in B ist, gilt dann $f|_B(A) \subseteq A$. Das bedeutet aber $f(A) \subseteq A$. Da f beliebig war, ist also A charakteristisch in C.

(b) Es sei $c \in C$. Da B normal in C ist, gilt $cBc^{-1} \subseteq B$. Die Abbildung $g : B \to B$ mit $b \mapsto cbc^{-1}$ ist dann ein Automorphismus von B. Da A charakteristisch in B ist, gilt daher $g(A) \subseteq A$, also $cAc^{-1} \subseteq A$. Da $c \in C$ beliebig war, ist also A normal in C.

(c) Wie angegeben, wählen wir $A := \{\mathrm{id}, (12)(34)\}$, $B = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ und $C = \mathrm{Alt}_4$. Dann ist A normal in B (denn B ist abelsch, so daß jede Untergruppe ein Normalteiler ist), und B ist charakteristisch in C (als die einzige Untergruppe von C der Ordnung 4). Andererseits ist A nicht normal in C, denn mit $a := (12)(34)$ und $c := (123)$ gilt

$$cac^{-1} \;=\; (123)(12)(34)(132) \;=\; (14)(23) \;\notin A.$$

(d) Diese Aussage folgt sofort aus Teil (c).

Lösung (7.6) Wir fassen G sowie U_1 und U_2 gemäß (6.3) als Matrizengruppen auf. Wegen

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AA_0A^{-1} & b - AA_0A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

und diese letzte Matrix hat im Regelfall einen Translationsanteil. Die Gruppe U_1 aller linearen Transformationen von K^n ist also kein Normalteiler von G. Dagegen haben wir

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & b_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ = & \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & b_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & Ab_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

so daß alle Konjugierten einer reinen Translation selbst wieder reine Translationen sind. Also ist die Untergruppe U_2 aller Translationen ein Normalteiler von G.

Lösung (7.7) Außer den trivialen Untergruppen $U = \{\mathrm{id}\}$ und $U = G$ besitzt $G = \mathrm{Sym}_3$ vier verschiedene Untergruppen. Wir gehen diese der Reihe nach durch und berechnen die Links- und Rechtsnebenklassen.

• Die Untergruppe $U_1 = \{\mathrm{id}, (12)\}$ hat den Index 3. Sie hat die Linksnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (12)\}, \quad \{(123), (13)\}, \quad \{(132), (23)\}$$

und die Rechtsnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (12)\}, \quad \{(123), (23)\}, \quad \{(132), (13)\}.$$

• Die Untergruppe $U_2 = \{\mathrm{id}, (23)\}$ hat den Index 3. Sie hat die Linksnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (23)\}, \quad \{(123), (12)\}, \quad \{(132), (13)\}$$

und die Rechtsnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (23)\}, \quad \{(123), (13)\}, \quad \{(132), (12)\}.$$

• Die Untergruppe $U_3 = \{\mathrm{id}, (13)\}$ hat den Index 3. Sie hat die Linksnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (13)\}, \quad \{(123), (23)\}, \quad \{(132), (12)\}$$

und die Rechtsnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (13)\}, \quad \{(123), (12)\}, \quad \{(132), (23)\}.$$

• Die Untergruppe $U_4 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$ hat den Index 2. Sie hat die Linksnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (123), (132)\}, \quad \{(12), (23), (13)\}$$

und die Rechtsnebenklassen

$$\{\mathrm{id}, (123), (132)\}, \quad \{(12), (13), (23)\}.$$

Für U_1, U_2 und U_3 stimmen Links- und Rechtsnebenklassen nicht überein; diese Untergruppen sind also keine Normalteiler. Dagegen stimmen für U_4 Links- und Rechtsnebenklassen überein, so daß U_4 ein Normalteiler ist. (Das ist nach Aufgabe (7.2) ohnehin klar, weil U_4 den Index 2 hat.) Die Gruppe U_4 ist sogar eine charakteristische Untergruppe, denn es gilt $U_4 = \{\sigma \in \mathrm{Sym}^3 \mid \sigma^3 = \mathrm{id}\}$, und jeder Automorphismus bildet Lösungen der Gleichung $x^3 = e$ auf ebensolche ab.

Lösung (7.8) Die drei Aussagen folgen mit direkter Rechnung.

(a) Es ist $xU = \{\mathrm{id}, (12)\} = Ux$.
(b) Es ist $yU = \{(13), (123)\} \neq \{(13), (132)\} = Uy$.
(c) Es ist $(xU)(yU) = \{(13), (123), (132), (23)\}$, und dies ist keine Nebenklasse von U. (Alle Nebenklassen von U sind ja gleichmächtig mit U, also zweielementig.)

Lösung (7.9) Es geben ein Element $g \in G$ mit $(xU)(yU) = gU$. Dann gilt $xy = (xe)(ye) \in (xU)(yU) = gU$ und damit $xyU = gU$.

Lösung (7.10) Genau dann ist $\star$ eine wohldefinierte Verknüpfung, wenn aus $x_1U = x_2U$ und $y_1U = y_2U$ stets $x_1y_1U = x_2y_2U$ folgt, wenn das Ergebnis der Verknüpfung also nicht von den speziell gewählten Repräsentanten abhängt. Dies ist genau dann der Fall, wenn aus $x_2^{-1}x_1 \in U$ und $y_2^{-1}y_1 \in U$ stets $(x_2y_2)^{-1}(x_1y_1) \in U$ folgt, also $y_2^{-1}x_2^{-1}x_1y_1 \in U$ folgt, also

$$y_2^{-1}(x_2^{-1}x_1)y_2(y_2^{-1}y_1) \ \in U \ .$$

Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn für alle $\xi, \eta \in U$ und alle $y_2 \in G$ stets $y_2^{-1}\xi y_2\eta \in U$ gilt, also $y_2^{-1}\xi y_2 \in U$, wenn also $yUy^{-1} \subseteq U$ für alle $y \in G$ gilt. Dies ist genau die Bedingung dafür, daß U ein Normalteiler von G ist.

In diesem Fall ist $(xU)(yU) = x(Uy)U = x(yU)U = xyUU = xyU = (xU) \star (yU)$. Daß dann $(G/U, \star)$ eine Gruppe ist, ist klar: das Assoziativgesetz überträgt sich sofort von G auf G/U, das Neutralelement in G/U ist $eU = U$, und das Element $x^{-1}U$ ist invers zu xU.

Lösung (7.11) Das Neutralelement von G ist die Einheitsmatrix $M(0,0,0) = \mathbf{1}$. Die Verknüpfung in G ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M(a,b,c)M(a',b',c') &= \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= M(a+a', b+b', c+c'+ab'), \end{aligned}$$

und die Inversion in G ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M(a,b,c)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= M(-a, -b, -c+ab). \end{aligned}$$

(a) Wir berechnen den Kommutator zweier beliebiger Elemente in G und erhalten

$$\begin{aligned} & M(a,b,c)M(a',b',c')M(a,b,c)^{-1}M(a',b',c')^{-1} \\ = \ & M(a,b,c)M(a',b',c')\cdot \\ & \qquad \cdot M(-a,-b,-c+ab)M(-a',-b',-c'+a'b') \\ = \ & M(a+a',b+b',c+c'+ab')\cdot \\ & \qquad \cdot M(-a-a',-b-b',-c-c'+ab+a'b'+ab') \\ = \ & M(0,0,ab'-a'b). \end{aligned}$$

Die Kommutatorgruppe G' ist die von diesen Kommutatoren erzeugte Gruppe, also

$$G' \ = \ \{M(0,0,u) \mid u\in\mathbb{R}\} \ = \ \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid u\in\mathbb{R}\}.$$

Ferner liegt $M(a,b,c)$ genau dann im Zentrum von G, wenn der Kommutator von G mit jedem anderen Element $M(a',b',c')$ von G das Neutralelement $\mathbf{1}$ ist, wenn also $ab'-a'b=0$ für alle $a',b'\in\mathbb{R}$ gilt. Dies ist genau denn der Fall, wenn $a=b=0$ gilt. Also ist $Z(G)=\{M(0,0,c) \mid c\in\mathbb{R}\}=G'$.

(b) Wegen $M(a,0,c)M(a',0,c')=M(a+a',0,c+c')$ und $M(0,b,c)M(0,b',c')=M(0,b+b',c+c')$ sind U_1 und U_2 Untergruppen von G $\big($und zwar jeweils isomorph zu $(\mathbb{R}^2,+)\big)$. In beiden Fällen liegt sogar ein Normalteiler vor, weil die Konjugation mit beliebigen Elementen von G nicht aus U_1 bzw. U_2 herausführt; dies folgt aus den Rechnungen

$$\begin{aligned} & M(x,y,z)M(a,0,c)M(x,y,z)^{-1} \\ = \ & M(x+a,y,z+c)M(-x,-y,-z+xy) \\ = \ & M(x,0,c-ay) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & M(x,y,z)M(0,b,c)M(x,y,z)^{-1} \\ = \ & M(x,y+b,z+c+ab)M(-x,-y,-z+xy) \\ = \ & M(0,b,c+ab). \end{aligned}$$

Lösung (7.12) Wir betrachten ein festes Element

$$g \ = \ \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{bmatrix} \in G\,.$$

Die zu U konjugierte Untergruppe uUg^{-1} ist

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{a_0c_0}\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 & -b_0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \mid a>0, b\in\mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ \frac{1}{a_0c_0}\begin{bmatrix} a_0a & a_0b+(b_0/a) \\ 0 & c_0/a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 & -b_0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \mid a>0, b\in\mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ \begin{bmatrix} a & \big((b_0/a)+a_0b-b_0a\big)/a_0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \mid a>0, b\in\mathbb{R} \right\} = U. \end{aligned}$$

Die Linksnebenklasse gU ist dann gerade

$$\begin{aligned} gU \ &= \ \{\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R},\ a>0\} \\ &= \ \{\begin{bmatrix} a_0a & a_0b+(b_0/a) \\ 0 & c_0/a \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R},\ a>0\} \\ &= \ \{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a_0c_0/x \end{bmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R},\ x>0\}, \end{aligned}$$

während die Rechtsnebenklasse Ug gegeben ist durch

$$\begin{aligned} Ug \ &= \ \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & c_0 \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R},\ a>0\} \\ &= \ \{\begin{bmatrix} aa_0 & ab_0+bc_0 \\ 0 & c_0/a \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R},\ a>0\} \\ &= \ \{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a_0c_0/x \end{bmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R},\ x>0\}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß

$(\star)$

$$gU=Ug=\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R},\ x>0,\ z=\frac{a_0c_0}{x} \right\}$$

gilt, die Links- und die Rechtsnebenklassen also übereinstimmen (während die einzelnen Elemente gu und ug mit einem festen Element $u\in U$ im allgemeinen nicht übereinstimmen). Identifizieren wir zur graphischen Darstellung die Nebenklasse $(\star)$ mit der Menge $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\in\mathbb{R},\ x>0,\ z=a_0c_0/x\}$, also dem Graphen der Funktion $z=a_0c_0/x$, so erhielten wir die folgende graphische Darstellung der Nebenklassen (die eine "Blätterung" von G in disjunkte Flächen bilden).

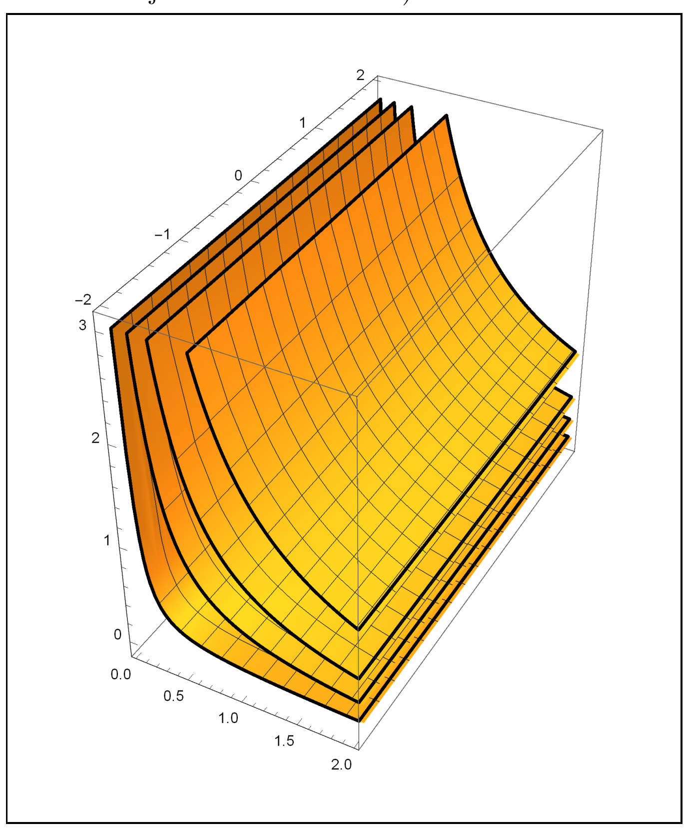

Abb.: Blätterung der Gruppe G in disjunkte Nebenklassen $gU=Ug$.

Lösung (7.13) Trivialerweise gilt $aAa^{-1} \subseteq A$; wegen $bab^{-1} = a^{-1}$ gilt auch $bAb^{-1} \subseteq A$. Weil nun $G = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ von a und b erzeugt wird, gilt daher sogar $xAx^{-1} \subseteq A$ für alle $x \in G$, und das bedeutet, daß A ein Normalteiler von G ist.

Wegen $bab^{-1} = a^{-1}$ gilt $aba = b$ und daher $aba^{-1} = a(aba)a^{-1} = a^2 b$. Wir behaupten nun, daß dieses Element nicht in $\langle\langle b\rangle\rangle = \{e, b, b^2, b^3\}$ liegt.

- Wäre $a^2b = e$, so wäre $b = a^{-2}$, folglich $e = b^4 = a^{-8}$, wegen $a^3 = e$ also $a = e$, was ausgeschlossen war.
- Wäre $a^2b = b$, so wäre $a^2 = e$, wegen $a^3 = e$ also $a = e$, was ausgeschlossen war.
- Wäre $a^2b = b^2$, so wäre $a^2 = b$, folglich $e = b^4 = a^8$, wegen $a^3 = e$ also $a = e$, was ausgeschlossen war.
- Wäre $a^2b = b^3$, so wäre $a^2 = b^2$, folglich $e = b^4 = a^4$ und wegen $a^3 = e$ daher $a = e$, was ausgeschlossen war.

Also gilt $aba^{-1} \notin B$ und daher $aBa^{-1} \not\subseteq B$, so daß B kein Normalteiler von G ist.

Lösung (7.14) Es sei A ein Normalteiler von G. Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt dann einerseits $ab = b(b^{-1}ab) \in BA$, andererseits $ba = (bab^{-1})b \in AB$. Also gilt sowohl $AB \subseteq BA$ als auch $BA \subseteq AB$, insgesamt also $AB = BA$. Daß dann AB eine Untergruppe von G ist, wurde schon in Aufgabe (4.7)(a) nachgerechnet. Der Fall, daß B ein Normalteiler ist, wird völlig analog behandelt (bzw. folgt durch Vertauschung der Rollen von A und B).

Lösung (7.15) Wir wollen zeigen, daß die Abbildung

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A \times B & \to & G \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Einerseits gilt

$$\varphi\big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) \;=\; \varphi(a_1a_2, b_1b_2) \;=\; a_1a_2b_1b_2,$$

andererseits gilt

$$\varphi(a_1, b_1)\varphi(a_2, b_2)\big) \;=\; (a_1b_1)(a_2b_2) \;=\; a_1b_1a_2b_2;$$

die Bedingung, daß φ ein Homomorphismus ist, ist also gleichbedeutend damit, daß $ab = ba$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt. Das ist aber der Fall, denn es gilt einerseits $aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) \in AA = A$, andererseits $aba^{-1}b^{-1} = (aba^{-1})b^{-1} \in BB = B$ und damit insgesamt $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B = \{e\}$; die Bedingung $aba^{-1}b^{-1} = e$ bedeutet aber gerade $ab = ba$. Wegen $G = AB$ ist φ surjektiv. Andererseits ist φ auch injektiv, denn aus $a_1b_1 = a_2b_2$ folgt $a_2^{-1}a_1 = b_2b_1^{-1} \in A \cap B = \{e\}$ und damit $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Also ist φ ein Gruppenisomorphismus.

Lösung (7.16) Offensichtlich kann G nicht die triviale (einelementige) Gruppe sein. Dann sind aber $\{e\} \times \{e\}$, $G \times \{e\}$, $\{e\} \times G$ und $G \times G$ vier verschiedene Normalteiler von $G \times G$, nach Voraussetzung also die einzigen Normalteiler von $G \times G$. Besäße G einen nichttrivialen Normalteiler N, so wären $N \times \{e\}$, $\{e\} \times N$ und $N \times N$ weitere Normalteiler von $G \times G$; also kann es einen solchen Normalteiler N nicht geben. Dies zeigt, daß G einfach sein muß. Die Diagonale $\Delta := \{(g, g) \mid g \in G\}$ ist eine Untergruppe von $G \times G$, die von den obigen vier Normalteilern verschieden ist. Wäre G abelsch, so wäre auch $G \times G$ abelsch, die Untergruppe Δ somit ein Normalteiler von $G \times G$, während es nach Voraussetzung doch nur die vier genannten Normalteiler gibt. Dies zeigt, daß G nicht abelsch sein kann.

Lösung (7.17) Es seien σ ein beliebiger Automorphismus von G und $g \in G$ ein beliebiges Element von G. Wir haben dann

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \kappa_g \circ \sigma^{-1})(x) \;&=\; \sigma\big(g\sigma^{-1}(x)g^{-1}\big) \\ = \sigma(g)x\sigma(g^{-1}) \;&=\; \sigma(g)x\sigma(g)^{-1} \;=\; \kappa_{\sigma(g)}(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in G$ und damit $\sigma \circ \kappa_g \circ \sigma^{-1} = \kappa_{\sigma(g)}$. Die Konjugation in $\mathrm{Aut}(G)$ bildet also die Gruppe $\mathrm{Inn}(G)$ der inneren Automorphismen von G in sich ab. Das bedeutet, daß $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

Lösung (7.18) Es sei $U = \mathrm{Kern}(f)$ für einen Homomorphismus $f : G \to H$. Für alle $g \in G$ und alle $u \in U$ gilt dann $f(gug^{-1}) = f(g)f(u)f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = e_H$ und damit $gug^{-1} \in \mathrm{Kern}(f) = U$. Wir haben also $gUg^{-1} \subseteq U$ für alle $g \in G$; also ist U ein Normalteiler von f. Umgekehrt sei U ein beliebiger Normalteiler von f. Dann ist

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & G/U \\ x & \mapsto & xU \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}(f) = U$.

Lösung (7.19) (a) Die Abbildung $\det : \mathrm{GL}(n, K) \to K^\times$ ist ein Homomorphismus, dessen Kern gerade $\mathrm{SL}(n, K)$ ist. Also ist $\mathrm{SL}(n, K)$ ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n, K)$. Das kann man natürlich auch direkt sehen: gilt $\det(A) = 1$ und ist T eine beliebige invertierbare Matrix, so gilt $\det(TAT^{-1}) = \det(A) = 1$; die Konjugation mit T führt also nicht aus $\mathrm{SL}(n, K)$ heraus.

(b) Die Untergruppe U ist (außer im Trivialfall $n = 1$) kein Normalteiler von G. Um dies einzusehen, betrachten wir eine beliebige Matrix $S \in K^{(n-2)\times(n-2)}$ mit $S^T S = \mathbf{1}$ und setzen dann

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Wir haben dann $u \in U$, $g \in G$ und

$$gug^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} ARA^{-1} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

Da

$$ARA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$$

nicht die Bedingung $X^T X = \mathbf{1}$ erfüllt, erfüllt auch $gug^{-1} \in K^{n\times n}$ nicht diese Bedingung. Die Konjugation mit g überführt also die Matrix $u \in U$ in die Matrix $gug^{-1} \notin U$. Damit ist U kein Normalteiler.

(c) Die Untergruppe U ist (außer im Trivialfall $n = 1$) kein Normalteiler von G. Um dies einzusehen, betrachten wir eine beliebige invertierbare obere Dreiecksmatrix $D \in K^{(n-2)\times(n-2)}$ und setzen dann

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Wir haben dann $u \in U$, $g \in G$ und

$$gug^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ACA^{-1} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Da

$$ACA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$$

keine obere Dreiecksmatrix ist, ist auch $gug^{-1} \in K^{n\times n}$ keine obere Dreiecksmatrix. Die Konjugation mit g überführt also die Matrix $u \in U$ in die Matrix $gug^{-1} \notin U$. Damit ist U kein Normalteiler.

(d) Die Untergruppe U ist (außer im Trivialfall $n = 1$) kein Normalteiler von G. Um dies einzusehen, betrachten wir eine beliebige Permutationsmatrix $Q \in K^{(n-2)\times(n-2)}$ und setzen dann

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Wir haben dann $u \in U$, $g \in G$ und

$$gug^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} APA^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

Da

$$APA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$$

keine Permutationsmatrix ist, ist auch $gug^{-1} \in K^{n\times n}$ keine Permutationsmatrix. Die Konjugation mit g überführt also die Matrix $u \in U$ in die Matrix $gug^{-1} \notin U$. Damit ist U kein Normalteiler.

(e) Die Abbildung $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to (0,\infty)$ mit $f(A) := \mathrm{sign}\big(\det(A)\big)$ ist ein Homomorphismus, dessen Kern gerade U ist. Also ist U ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Das kann man natürlich auch direkt sehen: gilt $\det(A) > 0$ und ist T eine beliebige invertierbare Matrix, so gilt $\det(TAT^{-1}) = \det(A) > 0$; die Konjugation mit T führt also nicht aus U heraus.

(f) Für $n = 1$ und $n = 2$ ist $U = \{\mathrm{id}\}$, und dies ist trivialerweise ein Normalteiler. Für $n \geq 3$ ist dagegen U kein Normalteiler von G. Um dies einzusehen, wählen wir $\sigma \in U \setminus \{\mathrm{id}\}$; es gibt dann Elemente $i \neq j$ in $\{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) \neq j$. Für die Transposition $\tau := (in)$ erhalten wir dann $(\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1})(n) = (\tau\circ\sigma)(i) = \tau(j) \neq n$. Wir haben also $\sigma \in U$, aber $\tau\sigma\tau^{-1} \notin U$. Damit ist U kein Normalteiler von $G = \mathrm{Sym}_n$.

Lösung (7.20) Wir schreiben

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} * z := \frac{Az+B}{Cz+D}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \star \left(\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \star z\right) &= \frac{A_2 \cdot \dfrac{A_1 z + B_1}{C_1 z + D_1} + B_2}{C_2 \cdot \dfrac{A_1 z + B_1}{C_1 z + D_1} + D_2} \\
&= \frac{A_2(A_1 z + B_1) + B_2(C_1 z + D_1)}{C_2(A_1 z + B_1) + D_2(C_1 z + D_1)} \\
&= \frac{(A_2A_1 + B_2C_1)z + (A_2B_1 + B_2D_1)}{(C_2A_1 + D_2C_1)z + (C_2B_1 + D_2D_1)} \\
&= \left(\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}\right) \star z;
\end{aligned}$$

für je zwei Matrizen M_1 und M_2 gilt also $M_2 \star (M_1 \star z) = (M_2M_1) \star z$; das bedeutet $f_{M_2M_1} = f_{M_2} \circ f_{M_1}$. Für die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ gilt ferner $\mathbf{1} \star z = z$ für alle $z \in \mathbb{C}_\infty$, so daß $f_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}$ gilt. Dies zeigt, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der Möbiustransformationen mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet und daß die Abbildung $M \mapsto f_M$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}$ ist. Eine Matrix $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ liegt genau dann im Kern dieses Homomorphismus, wenn f_M die Identität ist, wenn also für alle $z \in \mathbb{C}_\infty$ die Gleichung

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \quad \text{bzw.} \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Bedingungen $b = c = 0$ und $a = d$ gelten, wenn also M ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Lösung (7.21) Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
x_1K = x_2K \ &\Leftrightarrow\ x_2^{-1}x_1 \in K = \mathrm{Kern}(f) \\
&\Leftrightarrow f(x_2^{-1}x_1) = e_H \\
&\Leftrightarrow f(x_2)^{-1}f(x_1) = e_H \\
&\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).
\end{aligned}$$

Die Implikation $\Rightarrow$ zeigt hierbei, daß $\widehat{f}$ wohldefiniert ist, die Impliation $\Leftarrow$ zeigt, daß $\widehat{f}$ injektiv ist. Da $\widehat{f}$ von vornherein als Abbildung in $f(G)$ (und nicht in H) definiert wurde, ist $\widehat{f}$ auch surjektiv und damit eine Bijektion. Wegen

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\big((xK)(yK)\big) &= \widehat{f}(xyK) = f(xy) \\
&= f(x)f(y) = \widehat{f}(xK)\widehat{f}(yK)
\end{aligned}$$

ist $\widehat{f}$ auch ein Gruppenhomomorphismus und damit ein Isomorphismus.