5. Lösung zu algebraischen Strukturen: Gruppenwirkungen und Abzählprobleme

Lösung (5.1) Jede Zerlegung der Zahl $1000 = 2^3 5^3$ in drei Faktoren hat die Form

$$1000 = (2^{\alpha_1} 5^{\beta_1})(2^{\alpha_2} 5^{\beta_2})(2^{\alpha_3} 5^{\beta_3})$$

mit Zahlen $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, die die Gleichungen $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 3$ und $\sum_{i=1}^3 \beta_i = 3$ erfüllen. Es sei X die Menge aller Sextupel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, die diese Bedingungen erfüllen; dann gilt $|X| = 10^2 = 100$. Die Zahl der möglichen Faktorisierungen ist aber geringer, weil zwei Sextupel dann miteinander identifiziert werden müssen, wenn sich die zugehörigen Faktorisierungen der Zahl 1000 nur in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Gruppentheoretisch läßt sich das folgendermaßen ausdrücken: die Gruppe $G = \mathrm{Sym}_3$ operiert auf X vermöge

$$\begin{aligned} &\sigma \star (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) := \\ &(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}, \beta_{\sigma(1)}, \beta_{\sigma(2)}, \beta_{\sigma(3)}), \end{aligned}$$

und zwei Sextupel müssen dann miteinander identifiziert werden, wenn sie unter dieser Gruppenwirkung ineinander überführt werden können. Zu ermitteln ist also die Anzahl der Bahnen, in die X unter der Wirkung von G zerfällt; dies geschieht mit Hilfe des Lemmas von Burnside. Wir ermitteln dazu für jedes Element $g \in G$ die Anzahl $\chi(g)$ der Fixpunkte. Für $g = \mathrm{id}$ gilt $\chi(g) = 100$; für jede der drei Transpositionen (12), (23) und (31) gilt $\chi(g) = 4$, und für jede der beiden Dreierzyklen (123) und (132) gilt $\chi(g) = 1$. Die Anzahl der Bahnen ist nach dem Lemma von Burnside dann

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{3!}(1 \cdot 100 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1) = \frac{114}{6} = 19.$$

Lösung (5.2) Wir beantworten die Frage allgemein für eine beliebige Anzahl n verfügbarer Farben und bestimmen dazu den Zyklenzeiger der maßgeblichen Permutationsgruppe. Die Symmetriegruppe des Quadrats, die auf der Menge der Ecken operiert, besteht dabei aus den folgenden Elementen:

- der Identität; diese hat die Zyklenstruktur $(4, 0, 0, 0)$, liefert also den Beitrag X_1^4 zum Zyklenzeiger;
- zwei 90^0-Drehungen (in und gegen Uhrzeigerrichtung); jede dieser beiden hat die Zyklenstruktur $(0, 0, 0, 1)$, liefert also den Beitrag X_4 zum Zyklenzeiger;
- der 180^0-Drehung; diese hat die Zyklenstruktur $(0, 2, 0, 0)$, liefert also den Beitrag X_2^2 zum Zyklenzeiger;
- zwei Spiegelungen an den Diagonalen; jede dieser beiden hat die Zyklenstruktur $(2, 1, 0, 0)$, liefert also den Beitrag $X_1^2 X_2$ zum Zyklenzeiger;
- zwei Spiegelungen an Parallelen zu den Seiten des Quadrats; jede dieser beiden hat die Zyklenstruktur $(0, 2, 0, 0)$, liefert also den Beitrag X_2^2 zum Zyklenzeiger.

Als Zyklenzeiger ergibt sich damit das Polynom

$$p(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{8}(X_1^4 + 2X_1^2 X_2 + 3X_2^2 + 2X_4).$$

Die Anzahl inäquivalenter Färbungen mit n Farben ist damit

$$\begin{aligned} p(n, n, n, n) &= \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8} \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n^2 + n + 2)}{8}. \end{aligned}$$

Für $n = 2$ gibt es demnach 6 Möglichkeiten.

Lösung (5.3) Wir beantworten die Frage wieder für eine beliebige Zahl n verfügbarer Farben. Zunächst kann man für jedes der 64 Felder eine beliebige Farbe wählen, wofür es n^{64} Möglichkeiten gibt. Nun sind aber zwei Färbungen dann miteinander zu identifizieren, wenn sie durch eine Symmetrieabbildung des Schachbretts ineinander überführt werden können. Für jede der vier Symmetrieabbildungen bestimmen wir nun die Anzahl der Fixpunkte (also der invarianten Färbungen): für die Identität ist diese Anzahl n^{64} (jede Färbung ist invariant); für die 180^0-Drehung ist sie n^{32} (eine Hälfte des Schachbrettes ist frei färbbar, die andere Hälfte ist dann durch die Bedingung der Invarianz schon festgelegt); für die 90^0- und die 270^0-Drehung ist sie jeweils n^{16} (ein Viertel des Schachbrettes ist frei färbbar, der Rest des Brettes ist dann durch die Bedingung der Invarianz schon festgelegt). Nach dem Lemma von Burnside ist die Anzahl wesentlich verschiedener Färbungen dann

$$\frac{1}{4}(n^{64} + n^{32} + 2n^{16});$$

für $n = 2$ ergibt sich die Anzahl 4 611 686 019 501 162 496.

Lösung (5.4) Wir formulieren die Aufgabe um; die Hälften eines Dominosteins sollen mit n verfügbaren Farben gefärbt werden. (In unserem Fall haben wir dann die $n = 7$ "Farben" 0, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 zur Verfügung.)

(a) Für einen einseitigen Dominostein gibt es nur zwei Symmetrieabbildungen, die Identität (mit n^2 Fixpunkten) und die 180^0-Drehung innerhalb der Ebene des Dominosteins (mit n Fixpunkten). Nach dem Lemma von Burnside ist die Anzahl wesentlich verschiedener Färbungen damit

$$\frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für $n = 7$ gibt es also 28 verschiedene Dominosteine.

(b) Für einen zweiseitigen Dominostein gibt es vier Symmetrieabbildungen; neben der Identität (mit n^4 Fixpunkten) drei 180^0-Drehungen (mit jeweils n^2 Fixpunkten), nämlich eine innerhalb der Ebene des Dominosteins und je eine um eine Symmetrieachse des Dominosteins). Nach dem Lemma von Burnside ist die Anzahl wesentlich verschiedener Färbungen damit

$$\frac{1}{4}(n^4+3n^2) \;=\; \frac{n^2(n^2+3)}{4}\,.$$

Für $n=7$ gibt es also 637 verschiedene Dominosteine.

Lösung (5.5) (a) Die Drehgruppe G eines regulären Tetraeders besteht aus der identischen Abbildung, aus acht Drehungen um 120^0 (um jeweils eine Verbindungslinie vom Mittelpunkt zu einer der Ecken, jeweils im oder gegen den Uhrzeigersinn) sowie drei Drehungen um 180^0 (jeweils um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier Kanten). Insgesamt hat G also 12 Elemente.

(b) Bei der Wirkung von G auf der Menge der Ecken des Tetraeders wirkt jede der 120^0-Drehungen als ein Dreierzyklus und jede der 180^0-Drehungen als ein Produkt zweier disjunkter Transpositionen; insgesamt bilden die von G induzierten Permutationen der Ecken des Tetraders gerade die alternierende Gruppe auf dieser Eckenmenge.

(c) Die von G induzierte Gruppe G_E von Permutationen der Eckenmenge des Tetraeders besteht aus der Identität mit der Zyklenstruktur $(4,0,0,0)$, acht Dreierzyklen mit der Zyklenstruktur $(1,0,1,0)$ sowie drei Produkten von Transpositionen mit der Zyklenstruktur $(0,2,0,0)$. Der Zyklenzeiger von G_E ist also

$$p_{G_E}(X_1,X_2,X_3,X_4) \;=\; \frac{1}{12}(X_1^4+8X_1X_3+3X_2^2)\,.$$

Die Anzahl G-inäquivalenter Färbungen der Eckenmenge des Tetraders mit n verfügbaren Farben ist dann

$$p_{G_E}(n,n,n,n) \;=\; \frac{1}{12}(n^4+11n^2) \;=\; \frac{1}{12}\cdot n^2(n^2+11)\,.$$

(d) Die von G induzierte Gruppe G_K von Permutationen der Kantenmenge des Tetraeders besteht aus der Identität mit der Zyklenstruktur $(6,0,0,0,0,0)$, acht Produkten disjunkter Dreierzyklen mit der Zyklenstruktur $(0,0,2,0,0,0)$ sowie drei Transpositionen mit der Zyklenstruktur $(2,2,0,0,0,0)$. Der Zyklenzeiger von G_K ist also

$$p_{G_K}(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \;=\; \frac{1}{12}(X_1^6+8X_3^2+3X_1^2X_2^2)\,.$$

Die Anzahl G-inäquivalenter Färbungen der Kantenmenge des Tetraders mit n verfügbaren Farben ist dann

$$\begin{aligned} p_{G_K}(n,n,n,n,n,n) \;&=\; \frac{n^6+8n^2+3n^4}{12} \\ &=\; \frac{n^2\cdot(n^4+3n^2+8)}{12}\,. \end{aligned}$$

(e) Die von G induzierte Gruppe G_S von Permutationen der Seitenmenge des Tetraeders besteht aus den gleichen Permutationen wie die Gruppe G_E der Eckenpermutationen aus Teil (c); fassen wir die Seiten des Tetraeders als Mengen von jeweils drei Ecken auf und schreiben wir

$$\begin{aligned} [1] \;&:=\; \{2,3,4\}, \\ [2] \;&:=\; \{1,3,4\}, \\ [3] \;&:=\; \{1,2,4\}, \\ [4] \;&:=\; \{1,2,3\}, \end{aligned}$$

so induziert jedes Element $\sigma\in G$ genau die gleiche Permutationen auf der Eckenmenge $\{1,2,3,4\}$ wie auf der Seitenmenge $\{[1],[2],[3],[4]\}$. Das Ergebnis dieses Teils der Aufgabe ist damit das gleiche wie in Teil (c).

Lösung (5.6) Die Menge der Ecken und Kanten eines Würfels ist eine Menge von insgesamt 20 Objekten, auf der die Symmetriegruppe des Würfels operiert. Die Wirkung eines jeden Gruppenelements ist gegeben durch eine Permutation der Ecken und eine gleichzeitige Permutation der Kanten; offensichtlich ist die Zyklenstruktur der Gesamtpermutation nichts anderes als die (komponentenweise) Summe Zyklenstrukturen der einzelnen Permutationen; wir können also die Ergebnisse aus dem Skript direkt übernehmen und erhalten für die einzelnen Gruppenelemente die folgenden Zyklenstrukturen:

- $(20,0,\ldots,0)$ für die Identität;
- $(0,10,0,\ldots,0)$ für die drei 180^0-Drehungen um Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte;
- $(0,0,0,5,0,\ldots,0)$ für die sechs 90^0-Drehungen um Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte;
- $(2,9,0,\ldots,0)$ für die sechs 180^0-Drehungen um Achsen durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte;
- $(2,0,6,0,\ldots,0)$ für die acht 120^0-Drehungen um Raumdiagonalen.

Als Zyklenzeiger ergibt sich damit das Polynom

$$\begin{aligned} &p(X_1,\ldots,X_{20}) \;= \\ &\frac{1}{24}(X_1^{20}+3X_2^{10}+6X_4^5+6X_1^2X_2^9+8X_1^2X_3^6)\,; \end{aligned}$$

die Anzahl möglicher Färbungen mit n verfügbaren Farben ist folglich

$$p(n,\ldots,n) \;=\; \frac{1}{24}(n^{20}+3n^{10}+6n^5+6n^{11}+8n^8)\,.$$

Lösung (5.7) (a) Die Identität hat die Zyklenstruktur $(6,0,0,0,0,0)$; die Drehungen um 120^0 und 240^0 haben jeweils die Zyklenstruktur $(0,0,2,0,0,0)$; jede der drei Spiegelungen hat die Zyklenstruktur $(0,3,0,0,0,0)$. Der Zyklenzeiger ist also

$$p_G(X_1,\ldots,X_6) \;=\; \frac{1}{6}(X_1^6+2X_3^2+3X_2^3)\,.$$

(b) Stehen n Farben zur Verfügungen, so ist die gesuchte Anzahl der Färbungen gerade

$$p_G(n,n,n,n,n,n) \;=\; \frac{1}{6}(n^6+2n^2+3n^3);$$

für $n=3$ ist diese Zahl 138.

Lösung (5.8) (a) Die Identität hat die Zyklenstruktur $(6,0,0,0,0,0)$; die Drehungen um 120^0 und 240^0 haben jeweils die Zyklenstruktur $(0,0,2,0,0,0)$; jede der drei Spiegelungen hat die Zyklenstruktur $(2,2,0,0,0,0)$. Die beiden Zyklenzeiger sind daher

$$\begin{aligned} p_{G_1}(X_1,\ldots,X_6) &= \frac{1}{3}(X_1^6+2X_3^2) \quad \text{und} \\ p_{G_2}(X_1,\ldots,X_6) &= \frac{1}{6}(X_1^6+2X_3^2+3X_1^2X_2^2)\,. \end{aligned}$$

(b) Stehen n Farben zur Verfügungen, so ist die gesuchte Anzahl rotationsinäquivalenter bzw. rotations- und spiegelungsinäquivalenter Färbungen gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{G_1}(n,n,n,n,n,n) &= \frac{n^6+2n^2}{3} \quad \text{bzw.} \\ p_{G_2}(n,n,n,n,n,n) &= \frac{n^6+2n^2+3n^4}{6}. \end{aligned}$$

Für $n=3$ sind diese Zahlen gleich 249 bzw. 165.