3. Lösung zu algebraischen Strukturen: Permutationen

Lösung (3.1) (a) $(135)(46) = (35)(15)(46)$
(b) $(173)(25) = (73)(13)(25)$
(c) $(137)(2546) = (37)(17)(54)(46)(26)$

Lösung (3.2) (a) $(13)(14)(23) = (1432)$
(b) $(12)(24)(431) = (243) = (43)(23)$
(c) $(12)(1342)(435)(25) = (1352) = (35)(52)(12)$
(d) Es gilt $(123)^{-1}(14536)(123) = (321)(14536)(123) = (26345) = (63)(34)(45)(25)$.

Lösung (3.3) (a) Es ergeben sich die folgenden Darstellungen.

$$\begin{aligned}\alpha &= (13568)(274) &&= (13)(35)(56)(68)(27)(74)\\ \beta &= (184)(26)(375) &&= (18)(84)(26)(37)(75)\\ \gamma &= (1847)(365) &&= (18)(84)(47)(36)(65)\end{aligned}$$

(b) Wir erhalten zunächst die folgenden Wertetabellen:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\circ\beta\circ\alpha &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&5&4&7&8&6\end{pmatrix},\\ \alpha\circ\beta\circ\gamma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&7&6&4&5&1&3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich dann die Darstellungen

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\circ\beta\circ\alpha &= (123)(45)(678) &&= (12)(23)(45)(67)(78),\\ \alpha\circ\beta\circ\gamma &= (12837)(465) &&= (12)(28)(83)(37)(46)(65).\end{aligned}$$

Lösung (3.4) (a) Wir erhalten zunächst die Zyklendarstellungen

$$\begin{aligned}\alpha &= (1,7,3,11)(2,8,10)(4,6)(5,9),\\ \beta &= (1,7,10,5,3,11)(2,9,6)(4,8),\\ \gamma &= (1,9,11,8,4)(2,7,10,5)(3)(6)\end{aligned}$$

und aus diesen dann die Darstellungen

$$\begin{aligned}\alpha &= (1,7)(7,3)(3,11)(2,8)(8,10)(4,6)(5,9),\\ \beta &= (1,7)(7,10)(10,5)(5,3)(3,11)(2,9)(9,6)(4,8),\\ \gamma &= (1,9)(9,11)(11,8)(8,4)(2,7)(7,10)(10,5).\end{aligned}$$

(b) Aus den in (a) gefundenen Darstellungen erhalten wir sofort $\mathrm{sign}(\alpha) = \mathrm{sign}(\gamma) = -1$ und $\sigma(\beta) = 1$.

(c) Aus den in (a) gefundenen Zyklendarstellungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(\alpha) &= \mathrm{kgV}(4,3,2,2) &&= 12,\\ \mathrm{ord}(\beta) &= \mathrm{kgV}(6,3,2) &&= 6,\\ \mathrm{ord}(\gamma) &= \mathrm{kgV}(5,4,1,1) &&= 20.\end{aligned}$$

Lösung (3.5) Wir erhalten folgende Darstellungen:
(a) $\sigma = (123456) = (23)(34)(45)(56)(16)$,
(b) $\sigma^2 = (135)(246) = (35)(15)(46)(26)$,
(c) $\sigma^3 = (14)(25)(36)$,
(d) $\sigma^4 = (153)(264) = (53)(13)(64)(24) = \sigma^{-2}$,
(e) $\sigma^5 = (165432) = (65)(54)(43)(32)(21) = \sigma^{-1}$.

Lösung (3.6) Es gilt

$$\sigma = (1,10,11,4,7)\,(2,12,6)\,(3,8,15,13)\,(5,9,14).$$

Lösung (3.7) Wegen $\sigma^0(i) = i$ gilt $i \sim i$. Gilt $i \sim j$, also $\sigma^m(i) = j$, dann auch $j = \sigma^{-m}(i)$ und damit $j \sim i$. Gelten schließlich die Beziehungen $i \sim j$ und $j \sim k$, dann auch $i \sim k$; aus $j = \sigma^m(i)$ und $k = \sigma^n(j)$ folgt nämlich $k = \sigma^n\sigma^m(i) = \sigma^{m+n}(i)$. Die Äquivalenzklasse von i besteht genau aus denjenigen Elementen von X, die in der Zyklenzerlegung von σ im gleichen Zyklus auftreten wie i.

Lösung (3.8) Es gilt $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)^{-1} = (x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1) = (x_1, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2)$.

Lösung (3.9) Für $\sigma = (x_1, x_2, \ldots, x_{Nk})$ gilt $\sigma^N = z_1 z_2 \cdots z_N$ mit $z_r := (x_r, x_{r+N}, x_{r+2N}, \ldots, x_{r+(k-1)N})$.

Lösung (3.10) Besteht θ aus N Zyklen der Länge k (mit $Nk = n$), so ist θ gemäß der Lösung zu Aufgabe (3.9) die N-te Potenz eines Zyklus der Länge $Nk = n$. Ist umgekehrt θ die Potenz eines n-Zyklus $\sigma = (x_1, \ldots, x_n)$, sagen wir $\theta = \sigma^N$, so haben die Zyklen von θ die Form $(x_r, x_{r+N}, x_{r+2N}, \ldots, x_{r+(k-1)N})$ und damit allesamt die gleiche Länge k, wobei kN das kleinste gemeinsame Vielfache von N und n ist.

Lösung (3.11) (a) Eine endliche Menge besitzt nur endlich viele bijektive Selbstabbildungen (nämlich $n!$, wenn n die Elementezahl der Menge ist). Ist also σ eine Permutation der Menge, so können die Abbildungen σ, σ^2, σ^3, … nicht alle voneinander verschieden sein; es gibt also natürliche Zahlen $k < \ell$ mit $\sigma^k = \sigma^\ell$, Dann ist aber $\sigma^{\ell-k} = \mathrm{id}_X$.

(b) Es sei n die Ordnung von σ, und es gelte $\sigma^N = \mathrm{id}_X$. Dann gilt $N \geq n$, und wir können eine Division mit Rest ausführen: $N = k \cdot n + r$ mit $0 \leq r < n$. Wir haben dann $\mathrm{id}_X = \sigma^{kn+r} = (\sigma^n)^k\sigma^r = (\mathrm{id}_X)^k\sigma^r = \sigma^r$. Da n definitionsgemäß die *kleinste* natürliche Zahl m mit $\sigma^m = \mathrm{id}_X$ ist und da andererseits $0 \leq r < n$ gilt, folgt hieraus $r = 0$ und damit $N = kn$; also ist N durch n teilbar.

Lösung (3.12) (a) Jeder der z_k Zyklen der Länge k enthält k Elemente der Grundmenge X. Da die Zyklen disjunkt sind, ist dann $\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot k$ die Elementezahl von X, also n.

(b) Es sei $\sigma = z_1 \cdots z_r$ die Zyklenzerlegung von σ. Genau dann gilt $\sigma^N = \mathrm{id}_X$, wenn $z_k^N = \mathrm{id}_X$ für alle $1 \leq$

$k \leq r$ gilt, wenn also N ein Vielfaches der Ordnung eines jeden auftretenden Zyklus z_k ist. Die Behauptung folgt dann sofort daraus, daß ein k-Zyklus die Ordnung k hat.

(c) Ist $\varphi \in \mathrm{Sym}_n$ und ist $(x_1, \ldots, x_k)$ ein beliebiger k-Zyklus, so gilt

$$\varphi \circ (x_1, \ldots, x_k) \circ \varphi^{-1} \;=\; \big(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)\big);$$

dies zeigt, daß je zwei Zyklen genau dann zueinander konjugiert sind, wenn sie die gleiche Länge haben. Wegen $\varphi(z_1 \cdots z_r)\varphi^{-1} = (\varphi z_1 \varphi^{-1}) \cdots (\varphi z_r \varphi^{-1})$ folgt hieraus leicht die Behauptung.

Lösung (3.13) (a) Es gibt $\binom{15}{4}$ Möglichkeiten, die 4 Fixpunkte auszuwählen. Unter den verbleibenden 11 Elementen gibt es $\binom{11}{3}$ Möglichkeiten, die drei Elemente für den geforderten 3-Zyklus auszuwählen; da drei Elemente a, b, c genau zwei Zyklen (nämlich (a, b, c) und (a, c, b)) bestimmen, gibt es also $2 \cdot \binom{11}{3}$ Wahlen für diesen Zyklus. Die verbleibenden 8 Elemente sind auf zwei 4er-Zyklen aufzuteilen. Mengenmäßig gibt es zunächst $\binom{8}{4}$ Wahlmöglichkeiten; da jede Menge mit vier Elementen 6 verschiedene 4er-Zyklen definiert, liefert dies $6 \cdot 6 \cdot \binom{8}{4}$ Wahlmöglichkeiten. Die Zahl der Elemente von Sym_{15} mit der gegebenen Zyklenstruktur ist also

$$\binom{15}{4} \cdot 2 \cdot \binom{11}{3} \cdot 6^2 \cdot \binom{8}{4} \;=\; 1\,135\,134\,000.$$

(b) Für die Auswahl der 5 Fixpunkte gibt es $\binom{19}{5}$ Möglichkeiten. Für den ersten der 2 Dreierzyklen lassen sich aus den verbleibenden 14 Elementen dann $\binom{14}{3}$ auswählen, aus denen sich dann 2! verschiedene Dreierzyklen bilden lassen; gleiches gilt für den zweiten Dreierzyklus. Da die Reihenfolge der beiden Dreierzyklen keine Rolle spielt, müssen wir anschließend noch durch 2 teilen. Für den ersten der 2 Viererzyklen lassen sich aus den verbleibenden 8 Elementen dann $\binom{8}{4}$ auswählen, aus denen sich dann 3! verschiedene Dreierzyklen bilden lassen; aus den jetzt noch verbleibenden 4 Elementen lassen sich 3! Dreierzyklen bilden. Da die Reihenfolge der beiden Viererzyklen keine Rolle spielt, müssen wir anschließend noch einmal durch 2 teilen. Die gesuchte Elementezahl ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}&\binom{19}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \binom{14}{3} \cdot 2 \binom{11}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \binom{8}{4} \cdot 6 \\ &= 36 \binom{19}{5} \binom{14}{3} \binom{11}{3} \binom{8}{4} = 1\,759\,911\,753\,600\,.\end{aligned}$$

Lösung (3.14) (a) Mit welchem Element wir den Zyklus beim Hinschreiben beginnen lassen, ist vollkommen gleichgültig; steht das erste Element fest, so gibt es für das zweite noch $k-1$ Möglichkeiten, für das dritte noch $k-2$, und so weiter. Aus k verschiedenen Elementen lassen sich also $(k-1)!$ verschiedene k-Zyklen bilden. Anders formuliert: Es gibt $k!$ Anordnungsmöglichkeiten für k Objekte; von diesen liefern aber jeweils k den gleichen Zyklus, da die Objekte zyklisch vertauscht werden dürfen. Die gesuchte Anzahl ist also $k!/k = (k-1)!$.

(b) Angenommen, alle Zyklen der Länge $\leq k-1$ sind bereits gebildet. Wir müssen dann aus den verbliebenen

$$n_{k-1} \;:=\; n - \big(1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + \cdots + (k-1) \cdot z_{k-1}\big)$$

verbliebenen Objekten zunächst die $z_k \cdot k$ Objekte auswählen, die in k-Zyklen auftreten sollen; für diese Wahl gibt es n_{k-1} über $k \cdot z_k$ Möglichkeiten. Anschließend gibt es $(k \cdot z_k)!/k!^{z_k}$ Möglichkeiten, die ausgewählten $k \cdot z_k$ Elemente in z_k Gruppen zu je k Elementen aufzuteilen; jede dieser Gruppen definiert nach Teil (a) dann $(k-1)!$ verschiedene Zyklen. Man hat im k-ten Schritt also

$$\begin{aligned} a_k \;&:=\; \binom{n_{k-1}}{k \cdot z_k} \cdot \frac{(k \cdot z_k)!}{k!^{z_k}} \cdot (k-1)!^{z_k} \\ &=\; \binom{n_{k-1}}{k \cdot z_k} \cdot \frac{(k \cdot z_k)!}{k^{z_k}} \;=\; \frac{n_{k-1}!}{n_k!} \cdot \frac{1}{k^{z_k}} \end{aligned}$$

verschiedene Möglichkeiten, k-Zyklen aus den nach den ersten $k-1$ Schritten verbliebenen Elementen zu bilden. Da man Wahlmöglichkeiten beliebig miteinander kombinieren kann, ist die gesuchte Anzahl dann

$$a_1 \cdots a_n \;=\; \frac{n_0!/n_n!}{1^{z_1} 2^{z_2} \cdots n^{z_n}} \;=\; \frac{n!}{1^{z_1} 2^{z_2} \cdots n^{z_n}}\,.$$

(c) Als Spezialfall von (b) ergibt sich die Anzahl

$$\frac{20!}{2^3 3^2 4^2} \;=\; \frac{20!}{1152} \;=\; 2\,111\,894\,104\,320\,000\,.$$

Lösung (3.15) Werden die Karten von oben nach unten mit $1, \ldots, 9$ numeriert, so ist die Permutation σ, die das Mischen beschreibt, gegeben durch die folgende Wertetabelle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In Zyklenschreibweise ist $\sigma = (182934567)$, und als Zyklus der Länge 9 hat σ die Ordnung 9. Das Mischen muß also neunmal durchgeführt werden, bis man wieder die ursprüngliche Anordnung der Karten erhält.

Lösung (3.16) Es sei $\tau = (a, b)$. Treten die Elemente a und b in der Zyklendarstellung von σ im gleichen Zyklus auf, so können wir diesen ganz nach rechts tauschen; wegen

$$\begin{aligned} &(a, x_1, \ldots, x_r, b, y_1, \ldots, y_s)(a, b) \\ &= (a, y_1, \ldots, y_s)(b, x_1, \ldots, x_r) \end{aligned}$$

gilt dann $k(\sigma\tau) = k(\sigma) + 1$. (Der Zyklus mit a und b wird durch die Multiplikation mit τ aufgespalten; englisch "cut".) Treten dagegen die Elemente a und b in verschiedenen Zyklen von σ auf, so können wir diese ebenfalls nach rechts tauschen und erhalten dann

$$\begin{aligned} &(b, y_1, \ldots, y_s)(a, x_1, \ldots, x_r)(a, b) \\ &= (a, y_1, \ldots, y_s, b, x_1, \ldots, x_r) \end{aligned}$$

und damit $k(\sigma\tau) = k(\sigma) - 1$. (Die Zyklen mit a und b werden durch die Multiplikation mit τ miteinander vereinigt; englisch "join".)

Lösung (3.17) (a) Wegen

$$(x_1x_2\ldots x_{k-1}x_k) = (x_2x_3)(x_3x_4)\cdots(x_{k-1}x_k)(x_kx_1)$$

kann ein k-Zyklus stets als Produkt von $k-1$ Transpositionen geschrieben werden. Um nachzuweisen, daß eine Darstellung mit weniger als $k-1$ Transposition nicht möglich ist, benutzen wir vollständige Induktion über k; der Induktionsanfang $k=1$ (bzw. $k=2$) ist dabei trivial. Beim Induktionsschritt nehmen wir an, ein $(k+1)$-Zyklus $(x_1x_2\ldots x_kx_{k+1})$ könne als Produkt von weniger als k Transpositionen geschrieben werden. Da nun eine Darstellung mit k Transpositionen möglich ist (s.o.), ist eine mit $k-1$ Transpositionen unmöglich (Signatur!); also ist nach Annahme sogar eine Darstellung mit höchstens $k-2$ Transpositionen möglich. In dieser Darstellung können wir nun annehmen, daß alle Transpositionen, die x_{k+1} enthalten, nach rechts verschoben werden; wir haben dann

$$(x_1\ldots x_kx_{k+1}) = p\circ(a_sx_{k+1})\circ\cdots\circ(a_1x_{k+1}),$$

wobei p das Produkt von maximal $k-2-s$ Transpositionen ist, welche x_{k+1} nicht enthalten, und wobei die Elemente a_i paarweise verschieden sind. Das bedeutet aber

$$\begin{aligned}&(x_1\ldots x_kx_{k+1}) \;=\\ &p\circ(a_2a_3)(a_3a_4)\cdots(a_{s-1}a_s)(a_sa_1)\circ(a_sx_{k+1})\end{aligned}$$

und damit $(x_1\ldots x_{k+1}) = \widetilde{p}\circ(a_s,x_{k+1})$, wobei $\widetilde{p}$ das Produkt von maximal $(k-2-s)+(s-1) = k-3$ Transpositionen ist, die jeweils x_{k+1} nicht enthalten. Dann ist aber

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_k) \;&=\; (x_1,\ldots,x_{k-1})(x_k,x_{k+1})\\ &=\; \widetilde{p}\circ(a_s,x_{k+1})(x_k,x_{k+1}),\end{aligned}$$

woraus $a_s = x_k$ folgt. (Andernfalls würde a_s auf x_{k+1} abgebildet). Dann ist aber $(x_1\ldots x_k) = \widetilde{p}$ als Produkt von maximal $k-3$ Transpositionen darstellbar, was der Induktionsannehme widerspricht.

(b) Wir denken uns $\sigma = \alpha\beta$ als Produkt von Transpositionen geschrieben. Manche von diesen enthalten nur Elemente von A, andere nur Elemente von B; andere schließlich sind von der Form (a,b) mit $a\in A$ und $b\in B$. Wegen $(a',b)(a'',b) = (a',a'')(a',b)$ und $(a,b')(a,b'') = (a,b'')(b',b'')$ lassen sich nun alle Transpositionen, die nur Elemente aus A bzw. B enthalten, ganz nach links bzw. rechts tauschen; wir erhalten also eine Darstellung

$$\sigma \;=\; \alpha\beta \;=\; \alpha_\star(a_1,b_1)\cdots(a_m,b_m)\beta_\star$$

bzw. $\alpha_\star^{-1}\alpha\beta\beta_\star^{-1} = (a_1,b_1)\cdots(a_m,b_m)$, wobei die Elemente a_i und b_i paarweise verschieden sind. Wäre nun $m\neq 0$, so würde b_m von $\alpha_\star^{-1}\alpha\beta\beta_\star^{-1}$ auf a_m abgebildet, was wegen der Disjunktheit von A und B nicht sein kann. Also ist $m=0$; eine minimale Darstellung von σ enthält keine "gemischte" Transposition.

(c) Es sei $(z_1,z_2,\ldots,z_k)$ die Zyklenstruktur von σ. Nach Teil (b) erhält man eine möglichst kurze Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen, indem man für jeden einzelnen Zyklus von σ eine solche Darstellung sucht. Für jeden der z_k Zyklen der Länge k benötigt man dazu nach Teil (a) genau $k-1$ Transpositionen; die Gesamtzahl der benötigten Transpositionen ist dann

$$\sum_{k=1}^n z_k\cdot(k-1) \;=\; \sum_{k=1}^n k\cdot z_k - \sum_{k=1}^n z_k \;=\; n-\sum_{k=1}^n z_k\,.$$

(d) Soll σ als Produkt von Transpositionen geschrieben werden, so ist die dazu benötigte Minimalzahl von Faktoren nach Teil (c) gerade $n-\sum_{k=1}^n z_k$. Dies ist $\leq n-1$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\sum_{k=1}^n z_k = 1$ gilt, also $z_1 = z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0$ und $z_n = 1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn σ ein n-Zyklus ist.

Lösung (3.18) Wir schreiben

$$\sigma \;=\; \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&6&u&v&3&w&1\end{pmatrix}.$$

Wählen wir beispielsweise $(u_0,v_0,w_0) := (7,5,4)$, so erhalten wir $\sigma_0 = (1264537)$, und dies ist eine gerade Permutation. Jede andere Möglichkeit ist von der Form $\sigma = \sigma_0\circ\theta$, wobei θ eine Permutation der Elemente (u,v,w) ist. Dafür, daß θ gerade wird, gibt es nur die drei Möglichkeiten der zyklischen Vertauschung; wir können für (u,v,w) also entweder $(7,5,4)$ oder $(4,7,5)$ oder aber $(5,4,7)$ einsetzen.

Lösung (3.19) Es seien x_{n-1} und x_n bzw. y_{n-1} und y_n die jeweils fehlenden Elemente der Menge X. Für die gesuchte Abbildung σ gibt es nur zwei Möglichkeiten; die erste ist definiert durch $\sigma_1(x_{n-1}) := x_{n-1}$ und $\sigma_1(x_n) := x_n$, die zweite durch $\sigma_1(x_{n-1}) := x_n$ und $\sigma_2(x_n) := x_{n-1}$. Wegen $\sigma_2 = \sigma_1\circ(x_{n-1},x_n)$ ist genau eine der beiden Permutationen σ_1 und σ_2 gerade.

Lösung (3.20) Jede Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen in Sym_m ist natürlich auch eine Darstellung als Produkt von Transpositionen in Sym_n.

Lösung (3.21) (a) Es sei $\sigma = z_1\cdots z_m$ die Zyklendarstellung von σ; wegen $\sigma^2 = z_1^2\cdots z_m^2$ gilt genau dann $\sigma^2 = \mathrm{id}_X$, wenn $z_k^2 = \mathrm{id}_X$ für $1\leq k\leq m$ gilt, wenn also σ das Produkt disjunkter Transpositionen ist.

(b) Um aus n Elementen ein Produkt disjunkter Transpositionen zu bilden, hat man $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, die Elemente für die erste Transposition auszuwählen, dann $\binom{n-2}{2}$ für die zweite Transposition, und so weiter. Bezeichnet k die Anzahl der gewünschten Transpositionen (wobei $k=0$ die identische Abbildung liefert), so können die so gebildeten k Paare noch beliebig miteinander vertauscht werde, wofür es $k!$ Möglichkeiten gibt. Also erhalten wir (wenn der Term mit $k=0$ jeweils als 1 gelesen wird) für a_n den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le k\le n/2} \frac{1}{k!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\cdots\binom{n-2(k-1)}{2} \\
&= \sum_{0\le k\le n/2} \frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{2(n-2)!}\cdot\frac{(n-2)!}{2(n-4)!}\cdot\frac{(n-4)!}{2(n-6)!}\cdots\frac{(n-2k+2)!}{2(n-2k)!} \\
&= \sum_{0\le k\le n/2} \frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-2k)!}\cdot\frac{1}{2^k} = \sum_{0\le k\le n/2}\frac{n!}{k!\,(n-2k)!\,2^k}\,.
\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben $X_{n+1} = X_n \cup \{x_{n+1}\}$, wobei X_n eine n-elementige Menge und x_{n+1} ein zusätzliches Element sei. Man kann nun aus den Elementen von X_{n+1} zum einen a_n Produkte disjunkter Transpositionen bilden, die nur Elemente aus X_n enthalten; zum andern hat man n Elemente zur Verfügung, die zusammen mit x_{n+1} eine Transposition bilden können, und kann zu jeder dieser Transpositionen noch a_{n-1} Produkte von Transpositionen aus den restlichen Elementen hinzufügen, so daß es $n\cdot a_{n-1}$ Produkte von Transpositionen gibt, in denen das Element x_{n+1} auftritt. Also gilt insgesamt $a_{n+1} = a_n + n\cdot a_{n-1}$.

Lösung (3.22) (a) Der Hinweis zeigt, daß sich je zwei aufeinanderfolgende Transpositionen (und damit jede gerade Permutationen) durch Dreierzyklen ausdrücken lassen. Umgekehrt ist jeder Dreierzyklus gerade, damit aber auch jedes Produkt von Dreierzyklen.

(b) Nach Teil (a) genügt es zu zeigen, daß sich jeder beliebige Dreierzyklus durch Dreierzyklen der speziellen Form $(12k)$ ausdrücken läßt. Dies ist aber nach dem gegebenen Hinweis der Fall.

Lösung (3.23) (a) Wir denken uns die einzelnen Felder des Spiels schachbrettartig mit Vorzeichen versehen, beginnend mit einem Plus in der linken oberen Ecke. Jede mögliche Folge von Zügen ist nun eine Abfolge von Transpositionen, bei denen das jeweils leere Feld mit einem Nachbarfeld vertauscht wird und damit sein Vorzeichen wechselt. Da am Ende das leere Feld wieder auf seinen ursprünglichen Platz kommt (und damit insgesamt sein Vorzeichen beibehält), wird insgesamt eine gerade Zahl von Transpositionen durchgeführt.

(b) Nach Teil (b) von Aufgabe (3.18) genügt es zu zeigen, daß jede der Permutationen $(1,2,k)$ mit $3\le k\le 15$ realisiert werden kann. Daß dies der Fall ist, läßt sich durch direktes (wenn auch mühseliges) Ausprobieren zeigen.

Lösung (3.24) Die alternierende Gruppe $G := \mathrm{Alt}_4$ besteht neben der Identität id aus den drei Elementen (12)(34), (13)(24) und (14)(23) der Ordnung 2 und den acht Elementen (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234) und (243) der Ordnung 3. Die Elemente der Ordnung 2 erzeugen die zweielementigen Untergruppen

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{\mathrm{id}, (12)(34)\},\\
U_2 &:= \{\mathrm{id}, (13)(24)\},\\
U_3 &:= \{\mathrm{id}, (14)(23)\}.
\end{aligned}$$

Das Produkt je zweier der Elemente der Ordnung 2 ist das jeweils dritte Element; also ist auch

$$V := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

eine Untergruppe von G. Die Elemente der Ordnung 3 erzeugen insgesamt vier Untergruppen mit jeweils drei Elementen, nämlich

$$\begin{aligned}
W_1 &:= \{\mathrm{id}, (123), (132)\},\\
W_2 &:= \{\mathrm{id}, (124), (142)\},\\
W_3 &:= \{\mathrm{id}, (134), (143)\},\\
W_4 &:= \{\mathrm{id}, (234), (243)\}.
\end{aligned}$$

Man überlegt sich schnell, daß zwei Elemente $\sigma_i \in W_i \setminus \{\mathrm{id}\}$ und $\sigma_j \in W_j \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $i \ne j$ schon ganz G erzeugen. Beispielsweise gelten für $\sigma_1 = (123)$ und $\sigma_2 = (124)$ die Gleichungen $\sigma_1\sigma_2 = (13)(24)$ und $\sigma_1(13)(24) = (243)$, so daß $\langle\!\langle \sigma_1, \sigma_2\rangle\!\rangle$ mindestens die sieben Elemente id, (123), (132), (124), (142), (243) und (13)(24) enthalten und damit zwangsläufig schon ganz G sein muß. Damit kann es außer den genannten Untergruppen nur die trivialen Untergruppen $\{\mathrm{id}\}$ und G geben. (Insbesondere besitzt G keine Untergruppe der Ordnung 6, obwohl dies durch den Satz von Lagrange nicht ausgeschlossen würde.) Der Untergruppenverband sieht also folgendermaßen aus.

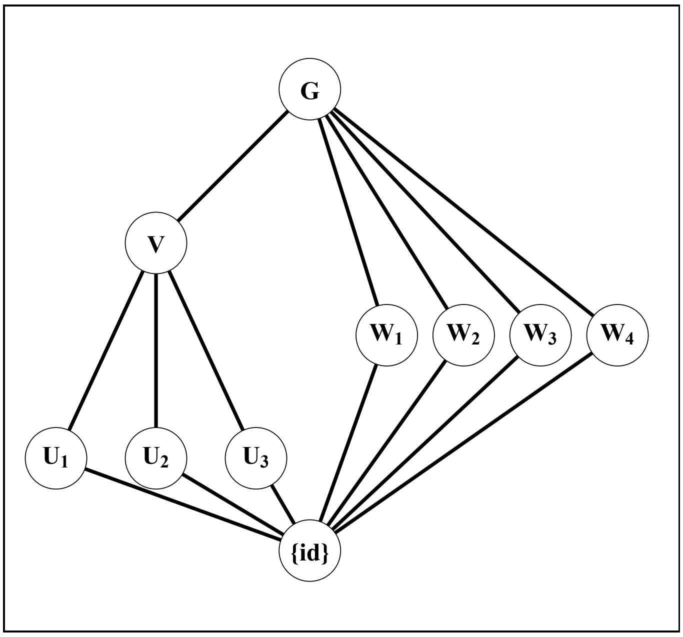

Abb. 3.24: Untergruppenverband der alternierenden Gruppe $G = \mathrm{Alt}_4$.