1. Lösung zu algebraischen Strukturen: Symmetriegruppen geometrischer Figuren

Lösung (1.1) Es treten vier verschiedene Symmetriegruppen auf.

- Bei den folgenden Buchstaben besteht die Symmetriegruppe nur aus der identischen Abbildung.

F G J K L P Q R

- Bei den folgenden Buchstaben besteht die Symmetriegruppe aus der Identität und einer Achsenspiegelung.

A B C D E M T U V W Y

- Bei den folgenden Buchstaben besteht die Symmetriegruppe aus der Identität und einer 180^0-Drehung (bzw. Punktspiegelung).

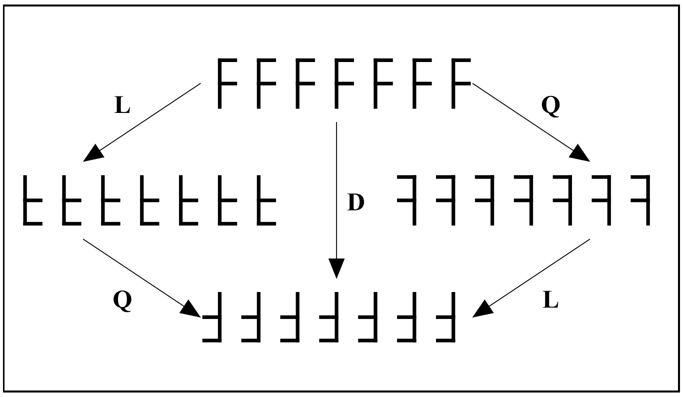
N S Z

- Bei den folgenden Buchstaben besteht die Symmetriegruppe aus der Identität, zwei Spiegelungen an aufeinander senkrecht stehenden Achsen und der 180^0-Drehung.

H I O X

Die Symmetriegruppen im zweiten und im dritten Fall stimmen dabei als abstrakte Gruppen überein; es handelt sich jeweils um eine Gruppe der Form $G = \{e, a\}$ mit dem Neutralelement e und einem Element $a \neq e$ mit $a^2 = e$.

Lösung (1.2) Wir bezeichnen mit T die das Muster definierende Translation, mit L die Längsspiegelung, mit Q die Querspiegelung, mit G die Gleitspiegelung und mit D die 180^0-Drehung wie in der Aufgabenstellung angegeben. Wegen $L \circ T = G$ hat jedes Muster, für das L und T Symmetrietransformationen sind, automatisch auch G als Symmetrietransformation. Ferner gelten die Gleichungen $L \circ Q = Q \circ L = D$, wie die folgende Abbildung klarmacht; jedes Muster, das unter den beiden Spiegelungen L und Q invariant ist, ist also automatisch auch unter der Drehung D invariant.



Nachweis der Gleichungen $Q \circ L = L \circ Q = D$.

Diese Überlegungen zeigen, daß nur die folgenden Mengen von Symmetrietransformationen auftreten können.

(1) $\{T\}$
(2) $\{T, L, G\}$
(3) $\{T, Q\}$
(4) $\{T, G\}$
(5) $\{T, D\}$
(6) $\{T, Q, D, G\}$
(7) $\{T, L, Q, G, D\}$

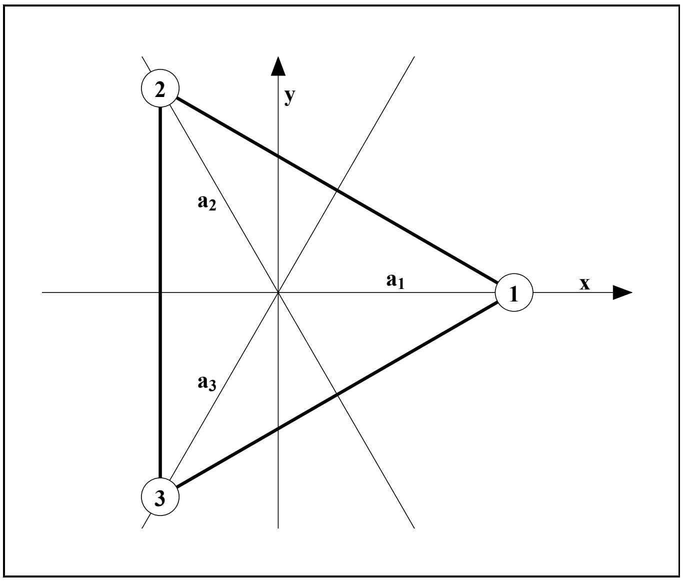
Daß umgekehrt jede dieser Mengen auch tatsächlich als Symmetriegruppe eines eindimensionalen geometrischen Musters auftreten kann, zeigen die in der Aufgabe angegebenen Muster; diese haben nämlich (von oben nach unten betrachtet) genau diejenigen Symmetrietransformationen, die in den Nummern (1) bis (7) jeweils aufgeführt sind.

Lösung (1.3) Jede der behaupteten Gleichungen folgt sofort durch Ausführung einer Matrizenmultiplikation und Benutzung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Die angegebenen Gleichungen zeigen, daß G multiplikativ abgeschlossen ist, ein neutrales Element enthält (nämlich $D_0 = \mathbf{1}$) und mit jedem Element auch ein dazu inverses Element besitzt (denn $D_\varphi^{-1} = D_{-\varphi}$ und $S_\varphi^{-1} = S_\varphi$). Da die Matrizenmultiplikation ohnehin assoziativ ist, folgt hieraus, daß G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G ist.

Lösung (1.4) (a) Es gibt sechs Symmetrietransformationen, nämlich die Drehungen um 0^0, 120^0 und 240^0 um den Mittelpunkt und die Spiegelungen an den drei Symmetrieachsen des Dreiecks. (Der Mittelpunkt ist dabei der Schwerpunkt, also der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.) Wir wählen ein Koordinatensystem wie in der Skizze angegeben.



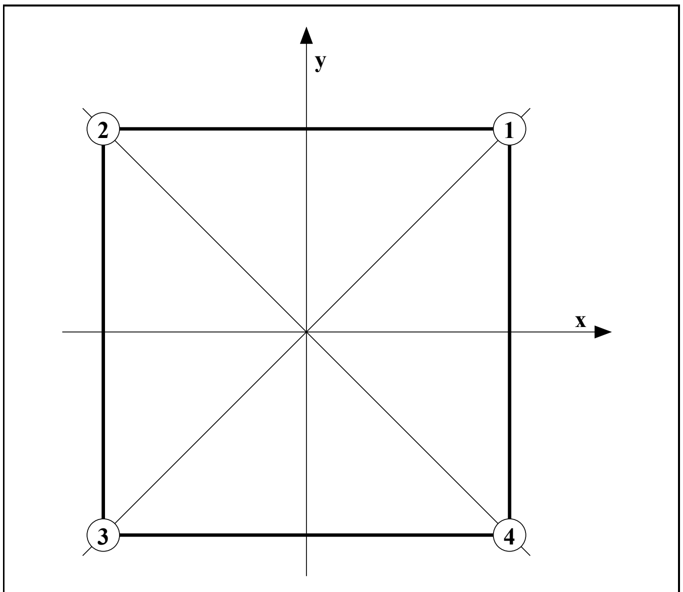
Symmetrietransformationen eines gleichseitigen Dreiecks.

Die Symmetrietransformationen sind dann mit den Bezeichnungen der vorigen Aufgabe durch die Matrizen D_φ und S_φ mit $\varphi \in \{0,\, 2\pi/3,\, 4\pi/3\}$ darstellbar. Da jede dieser Operationen in eindeutiger Weise dadurch charakterisiert ist, wie sie die Ecken des Dreiecks permutiert, können wir die betrachteten Operationen auch als Permutationen der Ecken darstellen. Es ergibt sich dann die folgende Liste der Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks.

Transformation	Matrix	Permutation
D_0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$D_{2\pi/3}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$D_{4\pi/3}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
S_0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$S_{4\pi/3}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$S_{2\pi/3}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Ein gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck hat keinerlei nichttriviale Rotationssymmetrie und nur eine Symmetrieachse. Die Symmetriegruppe eines solchen Dreiecks besteht also nur aus der Identität und der Spiegelung an der Symmetrieachse. Deutet man die Symmetrietransformationen als Permutationen der Ecken, so handelt es sich bei der Spiegelung um diejenige Permutation, die die beiden Ecken der Basis vertauscht und die Spitze des Dreiecks in sich überführt.

(c) Es gibt acht Symmetrietransformationen, nämlich die Drehungen um 0^0, 90^0, 180^0 und 270^0 um den Mittelpunkt und die Spiegelungen an den vier Symmetrieachsen des Quadrats. Wir wählen ein Koordinatensystem wie in der Skizze angegeben.



Symmetrietransformationen eines Quadrats.

Die Symmetrietransformationen sind dann (wieder mit den Bezeichnungen der vorherigen Aufgabe) durch die Matrizen D_φ und S_φ mit $\varphi \in \{0, \pi/2,\, \pi,\, 3\pi/2\}$ darstellbar. Da jede dieser Operationen in eindeutiger Weise dadurch charakterisiert ist, wie sie die Ecken des Quadrats permutiert, können wir die betrachteten Operationen auch als Permutationen der Ecken darstellen. Es ergibt sich die folgende Liste der Symmetrieoperationen eines Quadrats.

Transformation	Matrix	Permutation
D_0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$D_{\pi/2}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
D_π	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$D_{3\pi/2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
S_0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$S_{\pi/2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
S_π	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
$S_{3\pi/2}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) Ein nichtquadratischen Rechteck hat offenbar vier Symmetrietransformationen: die Identität, die 180^0-Drehung um den Rechtecksmittelpunkt und die Spiegelungen an den beiden Symmetrieachsen des Rechtecks. In einem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt der Rechtecksmittelpunkt ist und dessen Koordinatenachsen die beiden Symmetrieachsen des Rechtecks sind, sind diese Symmetrietransformationen gegeben durch die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Eine nichtquadratische Raute hat die gleiche Symmetriegruppe wie ein nichtquadratisches Rechteck. Das kann man sich leicht direkt überlegen; man kann aber auch ausnutzen, daß die beiden Figuren zueinander "dual" sind und deshalb die gleiche Symmetriegruppe besitzen müssen. Jede Symmetrietransformation eines Rechtecks muß nämlich dessen Kantenmittelpunkte und damit auch die von diesen gebildete Raute in sich abbilden. Umgekehrt muß jede Symmetrietransformation einer Raute auch deren Kantenmittelpunkte und damit das von diesen gebildete Rechteck in sich überführen. Damit ist klar, daß Raute und Rechteck die gleichen Symmetrien aufweisen.

Lösung (1.5) Das Dreiblatt hat genau die gleiche Symmetriegruppe wie ein gleichseitiges Dreieck; diese besteht aus den drei Drehungen um 0^0, 120^0 und 240^0

und den Spiegelungen an den drei Symmetrieachsen. Der Sechsschneuß hat dagegen reine Rotationssymmetrie; seine Symmetriegruppe besteht aus den Drehungen um $k\cdot 60^0$ mit $0 \le k \le 5$. Beide Symmetriegruppen haben die gleiche Zahl von Elementen (nämlich sechs); in diesem Sinn kann man also sagen, die beiden Figuren verfügten über den gleichen Grad an Symmetrie. Die Art der Symmetrie ist aber unterschiedlich. Auch als abstrakte Gruppen stimmen die beiden Symmetriegruppen nicht überein; beispielsweise ist die Symmetriegruppe des Sechsschneuß abelsch, die des Dreiblattes dagegen nicht.

Lösung (1.6) (a) Wir legen ein Koordinatensystem so, daß der Ursprung im Mittelpunkt des betrachteten regelmäßigen n-Ecks liegt und die x-Achse mit der Spiegelungsachse von S zusammenfällt; mit der Notation der vorhergehenden Aufgabe haben wir dann $S = S_0$. Ferner gilt $D = D_\varphi$ mit $\varphi = 2\pi/n$. Dann ist $D^k = D_\varphi^k = D_{k\varphi}$, und die Drehungen $D, D^2, \ldots, D^{n-1}, D^n = D^0 = \mathbf{1}$ sind genau die Drehungen, die das n-Eck in sich überführen. Wegen $SD^k = S_0 D_{k\varphi} = S_{-k\varphi}$ sind ferner die Abbildungen SD^k mit $1 \le k \le n$ genau die Spiegelungen, die das n-Eck in sich überführen.

(b) Wir haben $D^n = D_\varphi^n = D_{n\varphi} = D_{2\pi} = D_0 = \mathbf{1}$ und $S^2 = S_0^2 = D_0 = \mathbf{1}$. Ferner ist einerseits $DS = D_\varphi S_\varphi = S_{2\varphi}$, andererseits $SD^{n-1} = SD^{-1} = S_\varphi D_\varphi^{-1} = S_\varphi D_{-\varphi} = S_{2\varphi}$ und damit $DS = SD^{n-1}$.

(c) Ist b gerade, so gilt $(S^a D^k)(S^b D^\ell) = S^a D^k D^\ell = S^a D^{k+\ell}$. Ist dagegen b ungerade, so gilt wegen $DS = SD^{-1}$ zunächst $D^k S^b = D^k S = SD^{-k}$ und damit dann $(S^a D^k)(S^b D^\ell) = S^a (D^k S) D^\ell = S^a (SD^{-k}) D^\ell = S^{a+1} D^{\ell-k}$. Wir haben also $(S^a D^k)(S^b D^\ell) = S^c D^m$ mit $c := a + b$ modulo 2 und

$$m := \begin{cases} \ell + k, & \text{falls } b \text{ gerade,} \\ \ell - k, & \text{falls } b \text{ ungerade.} \end{cases}$$

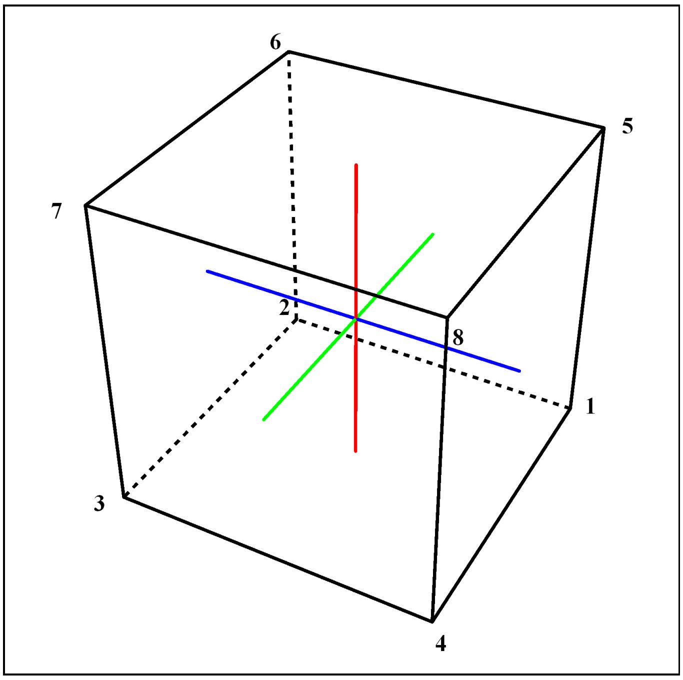
Wir können dies kurz in der Form $(S^a D^k)(S^b D^\ell) = S^{a+b} D^{\ell + (-1)^b k}$ schreiben, wenn klar ist, daß die beiden Exponenten auf der rechten Seite modulo 2 bzw. modulo n zu nehmen sind.

Lösung (1.7) (a) Wir suchen zunächst diejenigen Drehungen, die den Würfel in sich überführen. Außer der identischen Abbildung gibt es die folgenden Möglichkeiten.

• Betrachten wir eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels, so lassen (außer der Identität) noch die Drehungen um 90^0, 180^0 und 270^0 den Würfel invariant. Wie man sich diese Drehungen anhand eines Pappmodells veranschaulichen kann, ist in

`https://www.youtube.com/watch?v=X3eOGQGntEs`

gezeigt. Da es drei solcher Achsen gibt, liefert dies $3\cdot 3 = 9$ Drehungen.

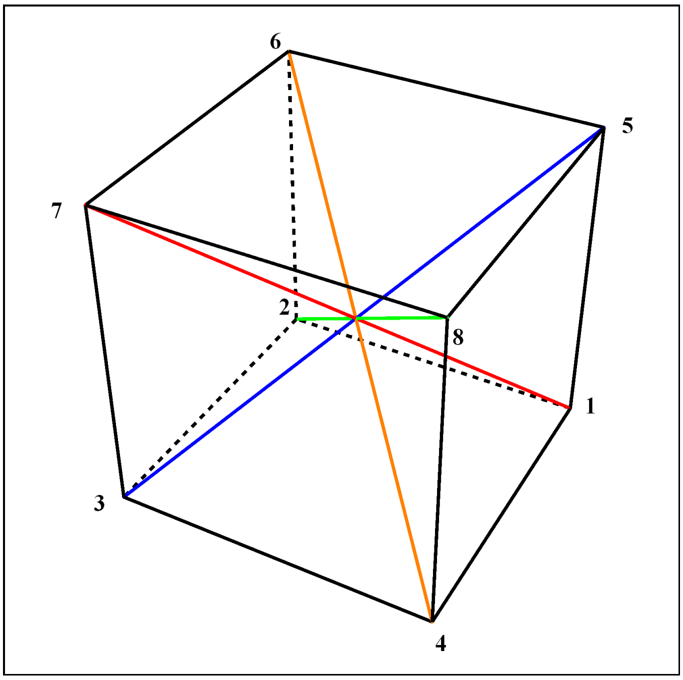


Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte.

• Betrachten wir eine Achse durch zwei gegenüberliegende Ecken des Würfels, so lassen (außer der Identität) noch die Drehungen um 120^0 und 240^0 den Würfel invariant. Wie man sich diese Drehungen anhand eines Pappmodells veranschaulichen kann, ist in

`https://www.youtube.com/watch?v=TggbcOrALMQ`

gezeigt. Da es vier solcher Achsen gibt, liefert dies $4\cdot 2 = 8$ Drehungen.



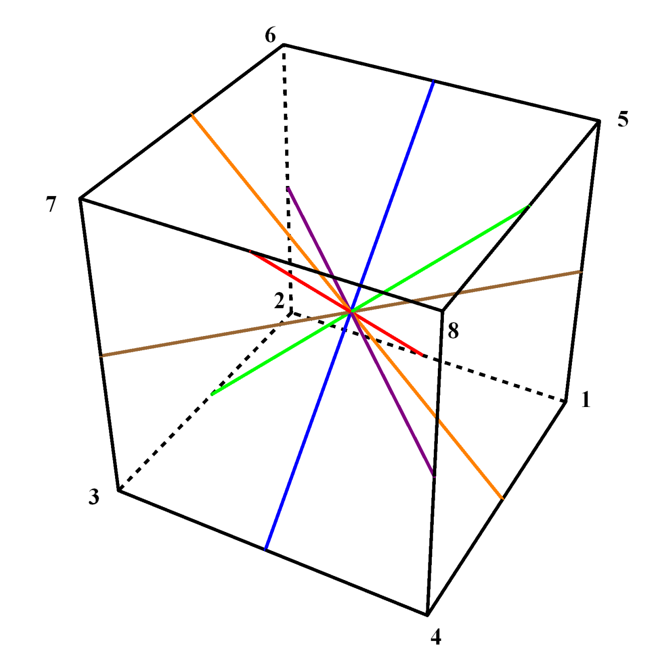
Achsen durch gegenüberliegende Ecken.

• Betrachten wir eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten des Würfels, so läßt (außer der Identität) noch die Drehung um 180^0 den

Würfel invariant. Wie man sich diese Drehungen anhand eines Pappmodells veranschaulichen kann, ist in

`https://www.youtube.com/watch?v=-PYDcHKPMKk`

gezeigt. Da es sechs solcher Achsen gibt, liefert dies $6 \cdot 1 = 6$ Drehungen.



Achsen durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte.

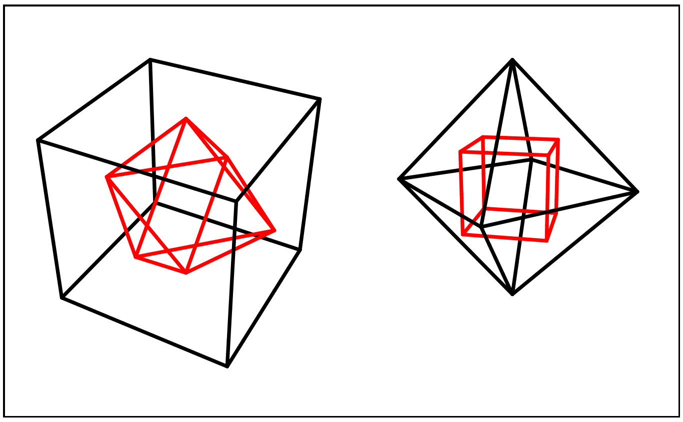
Zusammen mit der Identität haben wir also $1+9+8+6 = 24$ Drehungen gefunden, die den Würfel invariant lassen; Visualisierungen dieser Drehungen sind unter

`https://www.youtube.com/watch?v=gBg4-lJ19Gg`

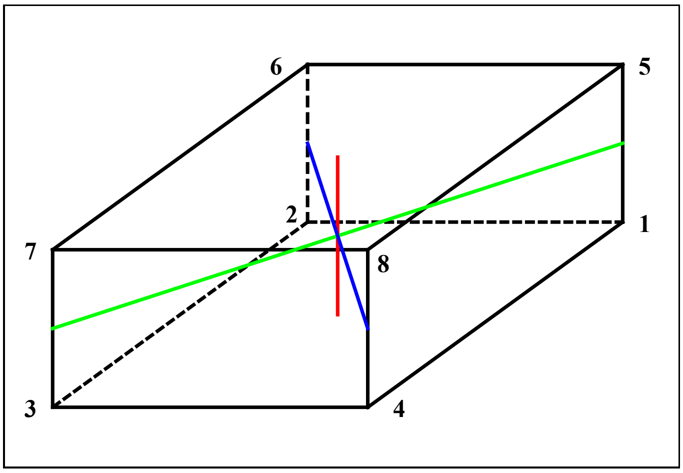
zu finden. Wir müssen nun noch klären, ob dies schon alle Drehungen sind, die den Würfel in sich überführen, oder ob es noch andere solcher Drehungen gibt, die wir bisher übersehen haben. Dazu beobachten wir, daß jede Symmetrieabbildung des Würfels dessen Diagonalen permutiert (warum ist das so?) und daß eine Drehung, die den Würfel in sich überführt, durch ihre Wirkung auf die Diagonalen schon eindeutig festgelegt ist. Der Würfel hat nun 4 Diagonalen; diese kann man auf $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Arten permutieren. Es kann daher nicht mehr als die 24 gefundenen Drehungen des Würfels geben.

Zu diesen Drehungen kommen noch die orientierungsumkehrenden Symmetrieabbildungen des Würfels hinzu. Eine solche Abbildung ist sicher die Punktspiegelung am Würfelmittelpunkt, also die Abbildung $\sigma = -\mathbf{1}$, wenn wir den Nullpunkt eines Koordinatensystems in den Würfelmittelpunkt legen. Ist nun D eine der zuvor gefundenen 24 Drehungen, so ist auch σD eine Symmetrieabbildung des Würfels. Da die insgesamt 48 Abbildungen D und σD paarweise voneinander verschieden sind, haben wir damit 48 Symmetrieabbildungen des Würfels gefunden. Andere kann es nicht geben, denn ist T irgendeine orientierungsumkehrende Transformation des Würfels, so ist σT eine orientierungserhaltende Transformation des Würfels, also eine der 24 Drehungen D. Aus $\sigma T = D$ folgt aber $T = \sigma^{-1} D = \sigma D$, so daß T eine der Abbildungen σD ist.

(b) Jede Symmetrietransformation eines Würfels muß dessen Seitenmittelpunkte und damit auch das von diesen gebildete Oktaeder in sich abbilden. Umgekehrt muß jede Symmetrietransformation eines Oktaeders auch dessen Seitenmittelpunkte und damit den von diesen gebildeten Würfel in sich überführen. Damit ist klar, daß ein Würfel und ein regelmäßiges Oktaeder die gleichen Symmetrien aufweisen. (Die beiden Figuren sind dual zueinander.)


Dualität von Würfel und Oktaeder.

(c) Außer der Identität gibt es drei Drehungen, die das Prisma in sich überführen, nämlich die 180^0-Drehungen um die drei eingezeichneten Achsen.



Drehsymmetrien eines Prismas mit Rautenquerschnitt.

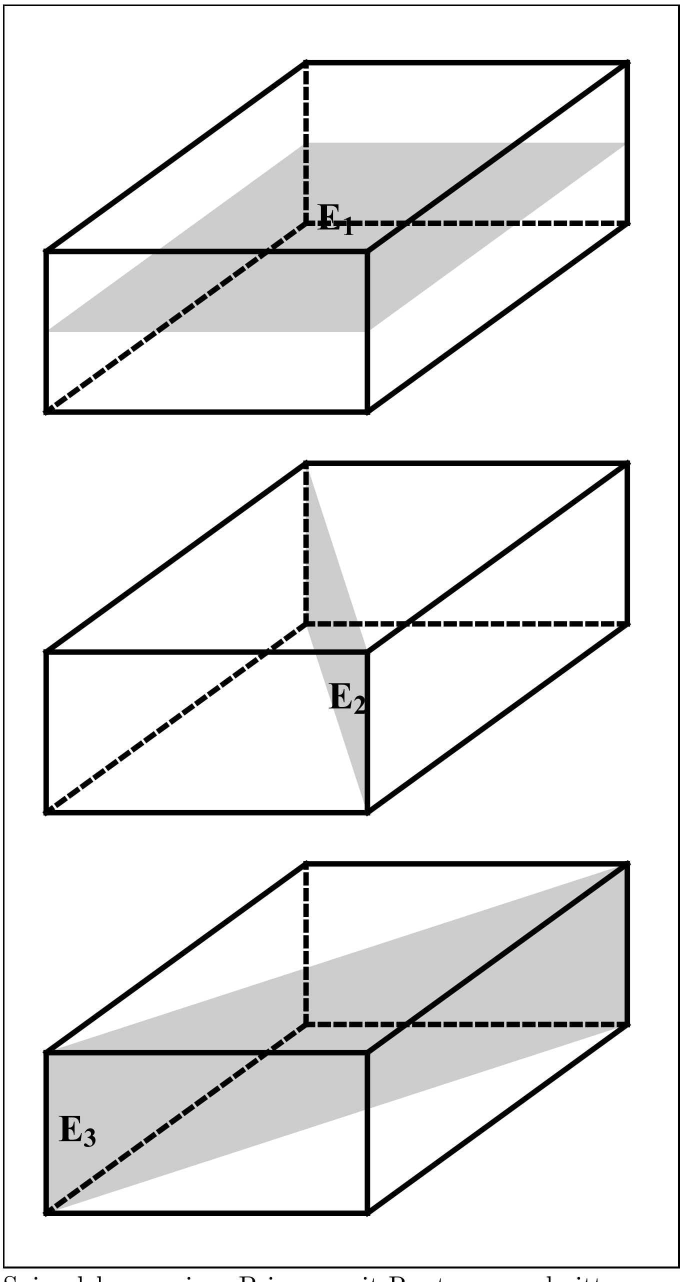
Identifizieren wir Symmetrien des Prismas als Permutationen der Ecken dieses Prismas, so sind diese drei Drehungen gegeben durch die folgenden Permutationen:

$$\begin{aligned} D_1 &= (13)(24)(57)(68) \quad \text{(rot);} \\ D_2 &= (15)(28)(37)(46) \quad \text{(grün);} \\ D_3 &= (17)(26)(35)(48) \quad \text{(blau).} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit σ die Punktspiegelung am Mittelpunkt des Prismas, so erhalten wir die folgenden weiteren (orientierungsumkehrenden) Symmetrieabbildungen des Prismas:

$$\begin{aligned}\sigma &= (17)(28)(35)(46),\\ \sigma\circ D_1 &= (15)(26)(37)(48),\\ \sigma\circ D_2 &= (13)(57),\\ \sigma\circ D_3 &= (24)(68).\end{aligned}$$

Für $k = 1, 2, 3$ ist dabei $\sigma \circ D_k$ jeweils die Spiegelung an der eingezeichneten Ebene E_k.



Spiegelebenen eines Prismas mit Rautenquerschnitt.

Lösung (1.8) (a) Wir machen zunächst eine einfache Beobachtung, die die Bestimmung der Automorphismengruppe eines Graphen oft sehr erleichtert; für einen beliebigen Knoten i müssen nämlich von i und $\sigma(i)$ jeweils gleich viele Kanten ausgehen. Für den links abgebildeten Graphen Γ schließen wir dann, daß die Bedingungen $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) \in \{2,3\}$, $\sigma(3) \in \{2,3\}$, $\sigma(4) \in \{4,5\}$ und schließlich $\sigma(5) \in \{4,5\}$ gelten müssen. Als Automorphismen des Graphen kommen außer der Identität also nur die Permutationen (23), (45) und (23)(45) in Frage. Nachprüfen zeigt, daß es sich dabei tatsächlich um Automorphismen von Γ handelt; es gilt also

$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \{\mathrm{id}, (23), (45), (23)(45)\}\,.$$

(b) Für den rechts abgebildeten Graphen Γ empfiehlt sich die Benutzung des Hinweises, denn der zu Γ komplementäre Graph $\overline{\Gamma}$ hat ein wesentlich übersichtlicheres Aussehen; er besteht nur aus den drei untereinander nicht verbundenen Kanten $\{1,4\}$, $\{2,3\}$ und $\{5,6\}$. Die Automorphismen von $\overline{\Gamma}$ (und damit von Γ) entstehen gerade so, daß eine beliebige Permutation der Kanten vorgibt (dafür gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten) und dann für jedes Paar aufeinander abzubildender Kanten jeweils eine der beiden Möglichkeiten wählt, die zugehörigen Ecken aufeinander abzubilden (dafür gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten). Insgesamt besteht $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ aus $6 \cdot 8 = 48$ Permutationen.