8. Übung zu algebraischen Strukturen: Grundbegriffe der Ringtheorie

Aufgabe (8.1) Es seien $a, b \in R$ beliebige Elemente eines Rings. Beweise die Gleichungen $(-a)b = a(-b) = -ab$ und $(-a)(-b) = ab$.

Aufgabe (8.2) Es seien $r \in R$ ein Element eines beliebigen Rings R und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir schreiben $n \cdot r := r + r + \cdots + r$ (mit n Summanden) sowie $(-n) \cdot r := -(n \cdot r)$ und setzen ferner $0 \cdot r := 0$. (Achtung: In dieser Gleichung steht auf der linken Seite die Zahl 0 in $\mathbb{Z}$, auf der rechten Seite das Nullelement des Rings R.) Zeige, daß dann für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und alle $r, s \in R$ die folgenden Gleichungen gelten:

- $(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$;
- $m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$;
- $(mn) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$;
- $m \cdot (rs) = (m \cdot r)s = r(m \cdot s)$.

Besitzt R ein Einselement 1, so gilt $m \cdot r = (m \cdot 1)r = r(m \cdot 1)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $r \in R$.

Aufgabe (8.3) Es sei R ein Ring. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Besitzt R ein Einselement, so folgt Axiom (1) schon aus den übrigen Axiomen.

(b) Ist R kommutativ, so folgt jedes der beiden Distributivgesetze (6) und (7) schon aus dem jeweils anderen Distributivgesetz.

Aufgabe (8.4) Es sei R ein Ring ohne Einselement. Wir machen $R_\star := \mathbb{Z} \times R$ zu einem Ring, indem wir Addition und Multiplikation folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned}(m, r) + (n, s) &:= (m + n, r + s),\\ (m, r) \cdot (n, s) &:= (mn, m \cdot s + n \cdot r + rs).\end{aligned}$$

Zeige, daß $R_\star$ ein Einselement besitzt und daß $\{0\} \times R$ ein zu R isomorpher Unterring von $R_\star$ ist. (Jeder beliebige Ring läßt sich also in einen Ring mit Einselement einbetten.) Zeige ferner, daß $R_\star$ genau dann kommutativ ist, wenn R kommutativ ist.

Aufgabe (8.5) Es seien $a, b \in R$ Elemente eines Rings R mit $ab = a$ und $ba = b$. Zeige, daß dann die Gleichungen $a^2 = a$ und $b^2 = b$ gelten.

Aufgabe (8.6) Finde Ringe $\{0\} \subsetneqq U \subsetneqq R$ mit folgenden Eigenschaften!

(a) Weder in R noch in U gibt es ein Einselement.

(b) In R gibt es ein Einselement, aber nicht in U.

(c) In U gibt es ein Einselement, aber nicht in R.

(d) In R gibt es ein Einselement, und dieses liegt in U.

(e) Sowohl in R als auch in U gibt es ein Einselement, aber diese beiden Elemente stimmen nicht überein.

Aufgabe (8.7) Zeige: Die Unterringe von $\mathbb{Z}$ sind genau die Mengen der Form $\mathbb{Z} \cdot n = \{xn \mid x \in \mathbb{Z}\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, also die Mengen aller Vielfachen eines fest gegebenen Elements.

Aufgabe (8.8) (a) Zeige, daß $U := \{[0], [2], [4]\}$ ein Unterring von $R := \mathbb{Z}_6$ ist, daß R und U beide ein Einselement besitzen, daß diese Einselemente aber nicht gleich sind.

(b) Zeige ganz allgemein: Ist U ein Unterring von $R := \mathbb{Z}_n$, so ist $u_0 \in U$ genau dann ein Einselement in U, wenn die Bedingungen $U = \mathbb{Z} \cdot u_0$ und $u_0^2 = u_0$ gelten. (Genau dann besitzt also ein Unterring U von $\mathbb{Z}_n$ ein Einselement, wenn U von einem idempotenten Element von $\mathbb{Z}_n$ erzeugt wird.)

Aufgabe (8.9) Es sei $R = \mathbb{Z}_n$ der Restklassenring modulo n. Bestimme in R alle Einheiten, alle Nullteiler, alle nilpotenten und alle idempotenten Elemente.

Aufgabe (8.10) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $C(I)$ der Ring aller stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. Bestimme in R alle Einheiten, alle Nullteiler, alle nilpotenten und alle idempotenten Elemente.

Aufgabe (8.11) Es sei $R = K^{n \times n}$ der Ring aller $(n \times n)$-Matrizen über einem beliebigen Körper K. Bestimme in R alle Einheiten, alle Nullteiler, alle nilpotenten Elemente und alle idempotenten Elemente!

Aufgabe (8.12) (a) Es seien a, b miteinander kommutierende nilpotente Elemente eines Rings R. Zeige, daß dann auch die Summe $a + b$ und das Produkt ab nilpotent sind.

(b) Zeige, daß in dem Ring $K^{2 \times 2}$ die Elemente

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nilpotent sind, daß aber weder $A + B$ noch AB nilpotent ist. (Auf die Voraussetzung, daß a und b kommutieren, kann also in Teil (a) nicht verzichtet werden.)

Aufgabe (8.13) Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und es seien a eine Einheit und b ein nilpotentes Element in R. Zeige: Die Summe $a + b$ ist eine Einheit, das Produkt ab ist ein nilpotentes Element.

Aufgabe (8.14) Es seien $a, b \in R$ Elemente eines kommutativen Rings. Zeige: ist weder a noch b ein Nullteiler, so ist auch ab kein Nullteiler. (Die Menge der Nichtnullteiler ist also multiplikativ abgeschlossen.)

Aufgabe (8.15) Zeige, daß in einem Ring genau dann 0 das einzige nilpotente Element ist, wenn 0 die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = 0$ ist.

Aufgabe (8.16) Es seien $a, b \in R$ Elemente eines Rings derart, daß a, b und $a+b$ idempotent sind. Zeige, daß dann a und b kommutieren, daß also $ab = ba$ gilt.

Aufgabe (8.17) Zeige, daß sich ein kommutativer unitärer Ring $R \neq \{0\}$ genau dann als direktes Produkt $R = R_1 \times R_2$ zweier kommutativer unitärer Ringe darstellen läßt, wenn es in R ein von 0 und 1 verschiedenes idempotentes Element $e \notin \{0,1\}$ gibt.

Aufgabe (8.18) Es sei $R = \prod_{i \in I} R_i$ das direkte Produkt einer Familie unitärer kommutativer Ringe. Charakterisiere in R die Einheiten, die Nullteiler, die nilpotenten und die idempotenten Elemente.

Aufgabe (8.19) Es sei R ein Ring mit $x^3 = x$ für alle $x \in R$. Zeige, daß R kommutativ ist und daß $6 \cdot x = 0$ für alle $x \in R$ gilt. (Beispiele sind etwa $R = \mathbb{Z}_2$, $R = \mathbb{Z}_3$ und $R = \mathbb{Z}_6$.)

Hinweis. Beweise zum Nachweis der Kommutativität von R nacheinander die folgenden Aussagen!

(a) Das einzige nilpotente Element in R ist das Nullelement.
(b) Gilt $x^2 = x$, so gilt $(xy - xyx)^2 = (yx - xyx)^2 = 0$ für alle $y \in R$.
(c) Gilt $x^2 = x$, so liegt x im Zentrum von R.
(d) Jedes Quadrat in R liegt im Zentrum von R.
(e) Jedes Element von R liegt im Zentrum von R. (Berechne für $x \in R$ die Elemente $(x^2+x)^2$ und $(x^2+x)^3$.)

Aufgabe (8.20) Es sei R ein Ring mit $x^4 = x$ für alle $x \in R$. Zeige zunächst, daß $2 \cdot x = 0$ für alle $x \in R$ gilt, und dann, daß R kommutativ ist.

Hinweis. Beweise zum Nachweis der Kommutativität von R nacheinander die folgenden Aussagen!

(a) Das einzige nilpotente Element in R ist das Nullelement.
(b) Gilt $x^2 = x$, so gilt $(xy - xyx)^2 = (yx - xyx)^2 = 0$ für alle $y \in R$.
(c) Gilt $x^2 = x$, so liegt x im Zentrum von R.
(d) Für alle $x \in R$ liegt $x^2 + x$ im Zentrum von R.
(e) Für alle $x, y \in R$ liegt $(x^2+y)^2 + (x^2+y)$ im Zentrum von R.
(f) Jedes Element der Form $x^2y + yx^2$ liegt im Zentrum von R.
(g) Für alle $x, y \in R$ gilt $xy = yx$. (Werte die Gleichung $(x^2y + yx^2)x^2 = x^2(x^2y + yx^2)$ aus!)

Aufgabe (8.21) Zeige, daß für einen kommutativen Ring R die folgenden Bedingungen äquivalent sind!

(1) Der einzige Nullteiler in R ist 0.
(2) Aus $ax = ay$ mit $a \neq 0$ folgt $x = y$ (Kürzungsregel).
(3) Für $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ höchstens eine Lösung.

Aufgabe (8.22) Es sei (X_i) eine beliebige Familie kommutierender Variablen. Zeige, daß für einen Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind!

(1) R ist ein Integritätsbereich
(2) $R[(X_i)]$ ist ein Integritätsbereich
(3) $R[[(X_i)]]$ ist ein Integritätsbereich

Aufgabe (8.23) (a) Zeige, daß es (bis auf Umbenennung der Elemente) genau einen Körper mit drei Elementen gibt!

(b) Zeige, daß es (bis auf Umbenennung der Elemente) genau einen Körper mit vier Elementen gibt!

Hinweis: Stelle jeweils die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation auf!

Aufgabe (8.24) Es sei K ein Körper. Wir bezeichnen mit G die Menge aller Polynome $p \in K[X]$, die entweder das Nullpolynom sind oder nur gerade Potenzen enthalten, und mit U die Menge aller Polynome $p \in K[X]$, die entweder das Nullpolynom sind oder nur ungerade Potenzen enthalten.

(a) Ist G ein Unterring von $K[X]$?
(b) Ist G ein Ideal von $K[X]$?
(c) Ist U ein Unterring von $K[X]$?
(d) Ist U ein Ideal von $K[X]$?

Aufgabe (8.25) Es seien m und n natürliche Zahlen. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) $(\mathbb{Z}m) + (\mathbb{Z}n) = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{ggT}(m,n)$
(b) $(\mathbb{Z}m) \cap (\mathbb{Z}n) = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{kgV}(m,n)$
(c) $(\mathbb{Z}m) \cdot (\mathbb{Z}n) = \mathbb{Z} \cdot mn$
(d) $(\mathbb{Z}m) : (\mathbb{Z}n) = \mathbb{Z} \cdot \big(m/\mathrm{ggT}(m,n)\big)$

Aufgabe (8.26) Es sei $I = \langle\!\langle 2, X \rangle\!\rangle$ das Ideal von $\mathbb{Z}[X]$, das von den Polynomen $p_1(X) = 2$ und $p_2(X) = X$ aufgespannt wird. Gib explizit an, welche Polynome in I liegen, und zeige, daß I kein Hauptideal ist.

Aufgabe (8.27) Es seien K ein Körper und

$$I \;:=\; \langle\!\langle XYZ - X^2,\, XY^2 + X^2Z \rangle\!\rangle \;\subseteq\; K[X,Y,Z].$$

Welche der folgenden Polynome sind in I enthalten?

(a) $X^2Z^2 - YX^2$
(b) $XY + YZ^2$
(c) $XY^3 - X^3$

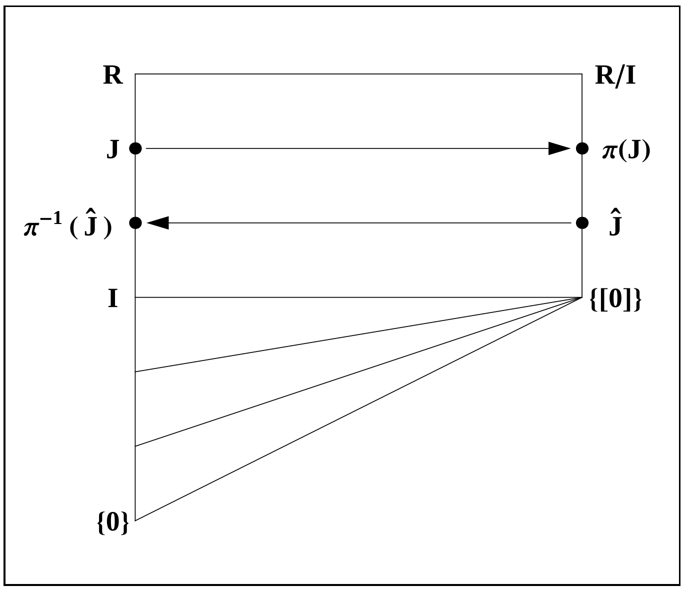
Aufgabe (8.28) Es seien $I, J, K, I_\alpha, J_\alpha$ Ideale eines kommutativen Rings R. Beweise die folgenden Rechenregeln für Ideale!

(a) $I \subseteq (I : J)$, $(I : J) \cdot J \subseteq I$
(b) $(\bigcap_\alpha I_\alpha) : J = \bigcap_\alpha (I_\alpha : J)$
(c) $I : (\sum_\alpha J_\alpha) = \bigcap_\alpha (I : J_\alpha)$
(d) $(I : J) : K = I : (JK) = (I : K) : J$
(e) $I : J = I : (I + J)$

Aufgabe (8.29) Es sei I ein Ideal des Rings R, und es sei $\pi : R \mapsto R/I$ die zugehörige Quotientenabbildung. Zeige, daß dann durch

$$J \mapsto \pi(J) = J/I \quad \text{und} \quad \widehat{J} \mapsto \pi^{-1}(\widehat{J})$$

zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Ideale J von R mit $J \supseteq I$ und der Menge der Ideale $\widehat{J}$ von R/I gegeben ist. Zeige ferner, daß für jedes Ideal J mit $I \subseteq J \subseteq R$ die Isomorphie $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ besteht. (Der Quotientenring R/I gibt also sozusagen die Idealstruktur von R oberhalb von I unverfälscht wieder.)



Aufgabe (8.30) Es sei $R \neq \{0\}$ ein unitärer kommutativer Ring. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(1) R ist ein Körper;
(2) die einzigen Ideale von R sind $\{0\}$ und R;
(3) ein Homomorphismus $f : R \to S$ ist entweder identisch Null oder injektiv.

Aufgabe (8.31) Es sei K ein Körper, und es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Element von K^n. Zeige, daß $\{p \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid p(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$ ein maximales Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist.

Aufgabe (8.32) Finde alle Ringhomomorphismen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$!

Aufgabe (8.33) Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Für $a \in \mathbb{Z}$ definieren wir $f_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ durch $f_a([x]) := [ax]$, wobei $[x]$ die Restklasse von $x \in \mathbb{Z}$ modulo n bezeichne. Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist f_a ein Ringhomomorphismus?

Aufgabe (8.34) Es sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen (bzw. in (a) von unitären Ringen).
(a) Bildet f zwangsläufig Einheiten auf Einheiten ab?
(b) Bildet f zwangsläufig Nullteiler auf Nullteiler ab?
(c) Bildet f zwangsläufig nilpotente Elemente auf nilpotente Elemente ab?
(d) Bildet f zwangsläufig idempotente Elemente auf idempotente Elemente ab?

Aufgabe (8.35) Es sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Beweise die folgenden Aussagen!
(a) Es kann sein, daß R ein Einselement besitzt, S aber nicht.
(b) Es kann sein, daß R und S jeweils ein Einselement besitzen, daß aber $f(1_R) \neq 1_S$ gilt.
(c) Besitzt R ein Einselement und ist f surjektiv, so besitzt auch S ein Einselement, und es gilt $f(1_R) = 1_S$.
(d) Besitzen R und S jeweils ein Einselement und gilt $f(1_R) = 1_S$, so bildet f Einheiten in R auf Einheiten in S ab, d.h., es gilt $f(R^\times) \subseteq S^\times$.

Aufgabe (8.36) Es sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Beweise die folgenden Aussagen!
(a) Ist I ein Ideal von R, so ist $f(I)$ ein Ideal von $f(R)$, aber nicht notwendigerweise von S.
(b) Ist J ein Ideal von S, so ist $f^{-1}(J)$ ein Ideal von R. (Finde ein Beispiel, in dem J ein maximales Ideal von S ist, aber $f^{-1}(J)$ kein maximales Ideal von R.)

Aufgabe (8.37) Beweise die folgenden Aussagen!
(a) Genau dann gibt es einen surjektiven Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, wenn n ein Teiler von m ist.
(b) Genau dann gibt es einen injektiven Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, wenn m ein Teiler von n ist und die Zahlen n/m und m teilerfremd sind.

Aufgabe (8.38) Es sei $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ die Folge aller Primzahlen. Beweise die folgenden Aussagen!
(a) Für jede feste Zahl N ist die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \to \prod_{k=1}^{N} \mathbb{Z}_{p_k}$ surjektiv, aber nicht injektiv.
(b) Die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \to \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_k}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Aufgabe (8.39) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Zeige, daß

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{mn} & \to & \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \\ [x]_{mn} & \mapsto & ([x]_m, [x]_n) \end{array}$$

ein wohldefinierter Homomorphismus unitärer Ringe ist. Bestimme den Kern von Φ! Zeige ferner, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(1) Φ ist surjektiv;
(2) Φ ist injektiv;
(3) m und n sind teilerfremd.

Aufgabe (8.40) Über dem Körper $K = \mathbb{Z}_2$ betrachten wir ein beliebiges quadratisches Polynom $p(X) = X^2 + aX + b$. Berechne jeweils die Multiplikationstafel des Rings $R := K[X]/\langle p \rangle$ und verifiziere, daß R genau dann ein Körper ist, wenn p nicht in zwei Polynome kleineren Grades zerlegbar ist.