7. Übung zu algebraischen Strukturen: Normalteiler und Quotientengruppen

Aufgabe (7.1) Es sei G eine beliebige Gruppe. Zeige, daß das **Zentrum**

$$Z(G) \;:=\; \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}$$

und die **Kommutatoruntergruppe**

$$G' \;:=\; \langle\!\langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle\!\rangle$$

charakteristische Untergruppen von G sind.

Aufgabe (7.2) (a) Es sei U eine Untergruppe der Gruppe G. Zeige: Hat U den Index 2 (gilt also $[G:U] = 2$), so ist U ein Normalteiler von G.

(b) Finde Beispiele für die in (a) beschriebene Situation!

Aufgabe (7.3) (a) Zeige, daß in einer abelschen Gruppe jede Untergruppe normal ist.

(b) Zeige, daß die Quaternionengruppe nicht abelsch ist, daß aber jede Untergruppe von Q normal in Q ist. (Die Umkehrung von (a) ist also falsch.)

Aufgabe (7.4) In einer Gruppe G sei U die einzige Untergruppe mit einer vorgegebenen Elementezahl. Zeige, daß dann U zwangsläufig eine charakteristische Untergruppe von G ist.

Aufgabe (7.5) Es seien $A \le B \le C$ Gruppen. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Ist A charakteristisch in B und ist B charakteristisch in C, so ist A charakteristisch in C.
(b) Ist A charakteristisch in B und ist B normal in C, so ist A normal in C.
(c) Ist A normal in B und ist B charakteristisch in C, so ist nicht notwendigerweise A normal in C.
(d) Ist A normal in B und ist B normal in C, so ist nicht notwendigerweise A normal in C.

Hinweis: Wähle zum Nachweis von (c) als Beispiel für C die alternierende Gruppe Alt_4, für B die Gruppe $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ und für A eine zweielementige Untergruppe von B.

Aufgabe (7.6) Wir betrachten die affine Gruppe $G = \mathrm{Aff}(K^n)$ und in G die Untergruppe U_1 aller bijektiven linearen Abbildungen $K^n \to K^n$ und die Untergruppe U_2 aller Translationen. Zeige, daß U_2 ein Normalteiler ist, U_1 aber nicht.

Aufgabe (7.7) Bestimme für jede Untergruppe U der symmetrischen Gruppe $G = \mathrm{Sym}_3$ alle Linksnebenklassen und alle Rechtsnebenklassen. Welche Untergruppen sind Normalteiler? Welche Untergruppen sind sogar charakteristisch?

Aufgabe (7.8) Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{Sym}_3$, die Untergruppe $U = \{\mathrm{id}, (12)\}$ sowie die Elemente $x = (12)$ und $y = (13)$. Verifiziere die folgenden Aussagen!

(a) $xU = Ux$
(b) $yU \neq Uy$
(c) $(xU)(yU)$ ist keine Nebenklasse von U

Aufgabe (7.9) Es sei $U \le G$ eine Untergruppe der Gruppe G, und es seien $x, y \in G$ beliebige Elemente von G. Zeige: Ist das Produkt $(xU)(yU)$ überhaupt eine Linksnebenklasse von U, so gilt zwangsläufig $(xU)(yU) = xyU$.

Aufgabe (7.10) Es sei $U \le G$ eine Untergruppe der Gruppe G. Wir wollen auf der Menge G/U aller Linksnebenklassen von U eine innere Verknüpfung $\star$ definieren, und zwar durch

$$(xU) \star (yU) \;:=\; xyU.$$

Zeige, daß $\star$ genau dann eine wohldefinierte Verknüpfung ist, wenn U ein Normalteiler von G ist. In diesem Fall gilt zwangsläufig

$$(xU) \star (yU) \;=\; (xU)(yU) \;=\; \{xu_1yu_2 \mid u_1, u_2 \in U\},$$

und $(G/U, \star)$ ist eine Gruppe. (Man nennt $(G/U, \star)$ die **Quotientengruppe** oder **Faktorgruppe** von G nach U oder auch von G modulo U.)

Aufgabe (7.11) Die **Heisenberg-Gruppe** ist die Gruppe G aller Matrizen der Form

$$M(a,b,c) \;:=\; \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

(a) Bestimme das Zentrum $Z(G)$ und die Kommutatorgruppe G' von G.
(b) Zeige, daß $U_1 := \{M(a,0,c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 := \{M(0,b,c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$ Untergruppen von G sind. Sind U_1 und U_2 sogar Normalteiler?

Aufgabe (7.12) Wir betrachten die Gruppen

$$G \;:=\; \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\, a, c > 0\}$$

und

$$U \;:=\; \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\, a > 0\}.$$

Zeige, daß U ein Normalteiler von G ist, und stelle die Nebenklassen $gU = Ug$ mit $g \in G$ graphisch dar.

Aufgabe (7.13) Eine Gruppe $G = \langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle$ werde von zwei Elementen $a, b \neq e$ erzeugt, die die Gleichungen $a^3 = b^4 = e$ und $bab^{-1} = a^{-1}$ erfüllen. Zeige, daß die Untergruppe $A := \langle\!\langle a\rangle\!\rangle$ ein Normalteiler von G ist, die Untergruppe $B := \langle\!\langle b\rangle\!\rangle$ dagegen nicht.

Aufgabe (7.14) Es seien $A, B \leq G$ zwei Untergruppen einer Gruppe G. Zeige: Ist mindestens eine der beiden Gruppen ein Normalteiler von G, so gilt $AB = BA$, und dies ist eine Untergruppe von G.

Aufgabe (7.15) Eine Gruppe G besitze zwei Normalteiler $A, B \trianglelefteq G$ mit $AB = G$ und $A \cap B = \{e\}$. Zeige, daß dann G zum direkten Produkt $A \times B$ isomorph ist.

Aufgabe (7.16) Es sei G eine Gruppe derart, daß das direkte Produkt $G \times G$ genau vier Normalteiler besitzt. Zeige, daß G einfach ist (also keine nichttrivialen Normalteiler besitzt) und nicht abelsch sein kann.

Aufgabe (7.17) Es sei G eine Gruppe mit der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$. Zeige, daß die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ der inneren Automorphismen ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

Aufgabe (7.18) Es sei $U \leq G$ eine Untergruppe der Gruppe G. Zeige, daß U genau dann ein Normalteiler von G ist, wenn es einen Homomorphismus $f : G \to H$ in eine Gruppe H gibt mit $U = \mathrm{Kern}(f)$. (Die Normalteiler von G sind also genau die Kerne von auf G definierten Gruppenhomomorphismen.)

Aufgabe (7.19) Prüfe in den folgenden Fällen jeweils nach, ob U ein Normalteiler von G ist! Dabei bezeichne in (a), (b), (c) und (d) jeweils K einen beliebigen Körper. In (d) taucht der Begriff einer Permutationsmatrix auf; eine solche Matrix ist eine Matrix, in der jede Zeile und jede Spalte genau eine Eins und sonst lauter Nullen enthält.

(a) $G = \mathrm{GL}(n, K)$, $U = \mathrm{SL}(n, K)$
(b) $G = \mathrm{GL}(n, K)$,
$U = \mathrm{O}(n, K) := \{A \in K^{n\times n} \mid A^T A = \mathbf{1}\}$
(c) $G = \mathrm{GL}(n, K)$, $U =$Gruppe der invertierbaren oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen mit Koeffizienten in K
(d) $G = \mathrm{GL}(n, K)$, U=Gruppe der $(n\times n)$-Permutationsmatrizen mit Koeffizienten in K
(e) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$
(f) $G = \mathrm{Sym}_n$, $U = \{\sigma \in \mathrm{Sym}_n \mid \sigma(n) = n\}$

Aufgabe (7.20) Es sei $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Für jede Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

definieren wir eine Abbildung $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ durch

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(Jede Abbildung dieser Form heißt eine **Möbiustransformation**.) Zeige, daß die Menge $\mathfrak{M}$ aller Möbiustransformationen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe bildet und daß durch $M \mapsto f_M$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{M}$ gegeben ist. Welches ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe (7.21) Es sei $f : G \to H$ ein beliebiger Gruppenhomomorphisms mit dem Kern $K := \mathrm{Kern}(f)$. Zeige, daß dann

$$\widehat{f} : \begin{array}{ccc} G/K & \to & f(G) \\ xK & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

Bemerkung. Die Aussage dieser Aufgabe ist als **Homomorphiesatz** bekannt. Sie zeigt, daß das Bild eines Gruppenhomomorphismus schon durch dessen Kern bestimmt ist und daß sich die möglichen homomorphen Bilder einer Gruppe schon anhand des Studiums der Normalteiler dieser Gruppe ermitteln lassen.