5. Übung zu algebraischen Strukturen: Gruppenwirkungen und Abzählprobleme

Aufgabe (5.1) Auf wie viele verschiedene Arten kann die Zahl 1000 als Produkt dreier Zahlen geschrieben werden, wenn die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle spielt?

Aufgabe (5.2) Auf wie viele verschiedene Farben lassen sich die Ecken eines Quadrates mit zwei Farben einfärben, wenn zwei Färbungen dann miteinander identifiziert werden sollen, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung des Quadrats auseinander hervorgehen?

Aufgabe (5.3) Auf wie viele wesentlich verschiedene Arten lassen sich die 64 Felder eines Schachbretts färben, wenn zwei verschiedene Farben zur Verfügung stehen?

Aufgabe (5.4) Die beschriftete Seite eines Dominosteins besteht aus zwei quadratischen Hälften, von denen jede entweder 0, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Punkte aufweist.

(a) Wieviele verschiedene einseitig beschriftete Dominosteine gibt es?

(b) Wieviele verschiedene beidseitig beschriftete Dominosteine gibt es?

Aufgabe (5.5) (a) Zeige, daß die Drehgruppe G eines regulären Tetraeders aus 12 Elementen besteht.

(b) Zeige, daß bei Identifikation eines Elements $\sigma \in G$ mit der zugehörigen Permutation der Ecken des Tetraeders die Gruppe G gerade mit der alternierenden Gruppe Alt_4 übereinstimmt.

(c) Auf wie viele Arten lassen sich mit n Farben die Ecken des Tetraeders färben?

(d) Auf wie viele Arten lassen sich mit n Farben die Kanten des Tetraeders färben?

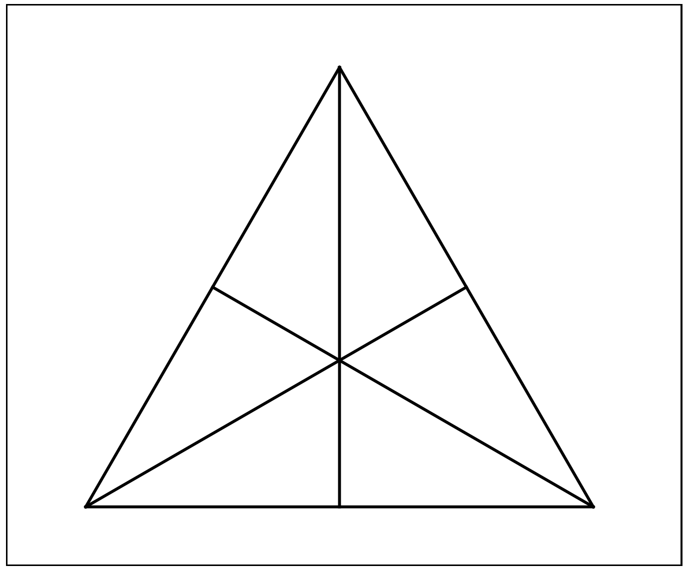
(e) Auf wie viele Arten lassen sich mit n Farben die Seiten des Tetraeders färben?

Aufgabe (5.6) Auf wieviele verschiedene Arten lassen sich Ecken *und* Seiten eines Würfels färben, wenn n verschiedene Farben zur Verfügung stehen?

Aufgabe (5.7) Ein gleichseitiges Dreieck sei wie abgebildet in sechs Felder zerlegt; die Symmetriegruppe des Dreiecks (Drehungen und Spiegelungen) wirkt dann als eine Permutationsgruppe G auf der Menge dieser sechs Felder.

(a) Bestimme den Zyklenzeiger von G!

(b) Wieviele G-inäquivalente Färbungen der sechs Felder gibt es, wenn drei Farben zur Verfügung stehen?

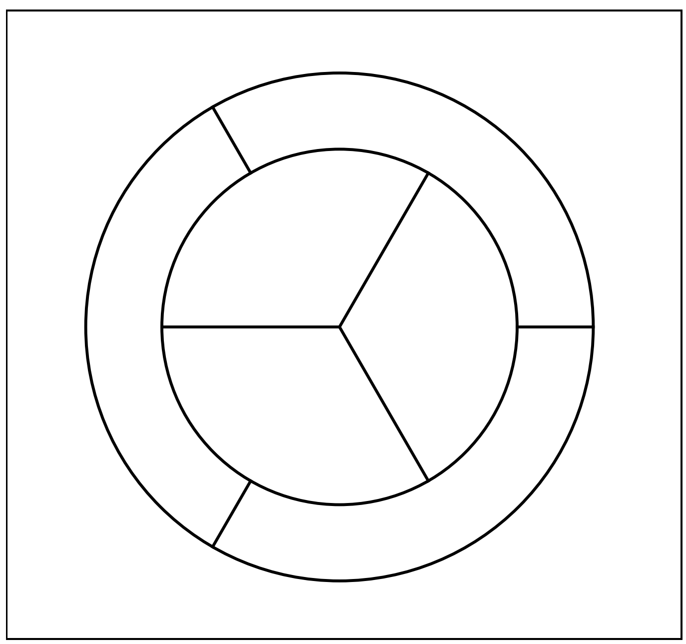


Dreieck mit zu färbenden Feldern.

Aufgabe (5.8) Eine Kreisscheibe sei wie abgebildet in sechs Felder zerlegt; wir bezeichnen mit G_1 und G_2 die Gruppe der Permutationen dieser sechs Felder, die von allen Drehungen bzw. allen Drehungen und Spiegelungen induziert werden, die die Figur in sich abbilden.

(a) Bestimme die Zyklenzeiger von G_1 und G_2.

(b) Wieviele G_1- bzw. G_2-inäquivalente Färbungen der sechs Felder gibt es, wenn n Farben zur Verfügung stehen?



Kreisscheibe mit zu färbenden Feldern.