4. Übung zu algebraischen Strukturen: Untergruppen und Nebenklassen

Aufgabe (4.1) (a) Es sei $U \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge einer Gruppe G. Zeige, daß U genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $UU \subseteq U$ gilt.

(b) Gib ein Beispiel für eine Gruppe G und eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ an, für die zwar $UU \subseteq U$ gilt, die aber keine Untergruppe von G ist.

Aufgabe (4.2) Es seien $A, B \leq G$ Untergruppen einer Gruppe G. Zeige, daß die Vereinigung $A \cup B$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt.

Aufgabe (4.3) Es seien G eine endliche Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge, die mehr als die Hälfte der Elemente von G enthält. Zeige, daß dann $G = SS$ gilt, daß sich also jedes Element $g \in G$ in der Form $g = s_1 s_2$ mit $s_1, s_2 \in S$ schreiben läßt. **Hinweis:** Zeige zunächst, daß die Behauptung äquivalent dazu ist, daß $gS^{-1} \cap S \neq \emptyset$ für alle $x \in G$ gilt.

Aufgabe (4.4) Es sei U eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe G. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf G durch $a \sim b :\Leftrightarrow ab^{-1} \in U$. Zeige, daß $\sim$ genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn U eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe (4.5) Es seien A, B, C Untergruppen einer Gruppe G. Zeige: Gilt $A \subseteq C$, dann auch $(AB) \cap C = A(B \cap C)$.

Aufgabe (4.6) Es seien A und B Untergruppen der endlichen Gruppe G. Zeige, daß dann die folgende Gleichheit gilt:

$$|AB| \;=\; \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}\,.$$

Aufgabe (4.7) (a) Es seien $A, B \leq G$ Untergruppen einer Gruppe G. Zeige, daß AB genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $AB = BA$ gilt.

(b) Wir betrachten in $G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die Matrizen

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die von diesen Matrizen erzeugten Untergruppen $A := \langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ und $B := \langle\!\langle b \rangle\!\rangle$ von G. Beschreibe A und B explizit und zeige, daß AB keine Untergruppe von G ist.

Aufgabe (4.8) Bestimme den Untergruppenverband der Diedergruppe D_4, d.h., finde alle Untergruppen von D_4 und stelle fest, welche Enthaltenseinsbeziehungen zwischen diesen Untergruppen bestehen.

Aufgabe (4.9) Es sei Q die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, die von den Matrizen

$$\mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ K := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

erzeugt wird. Überprüfe die Gültigkeit der Gleichungen

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1},\ IJ = K,\ JK = I,\ KI = J$$

und schließe, daß Q genau aus den acht Elementen $\pm\mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K$ besteht. (Diese Elemente heißen **reine Quaternionen**, und Q wird als **Quaternionengruppe** bezeichnet.) Stelle die Gruppentafel von Q auf und bestimme den Untergruppenverband dieser Gruppe.

Aufgabe (4.10) Für eine beliebige Teilmenge X einer Gruppe G sind der **Zentralisator** $Z_G(X)$ und der **Normalisator** $N_G(X)$ von X in G definiert durch

$$\begin{aligned} Z_G(X) &:= \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in X\}, \\ N_G(X) &:= \{g \in G \mid gX = Xg\}. \end{aligned}$$

Zeige, daß dies Untergruppen von G mit $Z_G(X) \subseteq N_G(X)$ sind. Zeige ferner: Ist $\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ die von X erzeugte Untergruppe von G, so gelten die Beziehungen $Z_G(X) = Z_G(\langle\!\langle X \rangle\!\rangle)$ und $N_G(X) \subseteq N_G(\langle\!\langle X \rangle\!\rangle)$.

Bemerkung: Statt $Z_G(G)$ schreibt man kurz $Z(G)$; diese Untergruppe heißt das **Zentrum** von G.

Aufgabe (4.11) Es sei Z das Zentrum der endlichen Gruppe G. Zeige: Ist G nicht abelsch, so kann $[G : Z]$ keine Primzahl sein. **Hinweis.** Ist $x \in G \setminus Z$, so betrachte den Zentralisator $Z_G(x) := Z_G(\{x\})$.

Aufgabe (4.12) (a) Es sei $G := \prod_{i \in I} G_i$ das direkte Produkt einer Familie $(G_i)_{i \in I}$. Zeige: Ist für jeden Index $i \in I$ eine Untergruppe $U_i \leq G_i$ gegeben, so ist $U := \prod_{i \in I} U_i$ eine Untergruppe von G.

(b) Gib die Gruppentafel des direkten Produkts $G := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ an und finde sämtliche Untergruppen von G.

Aufgabe (4.13) Zeige, daß eine Gruppe genau dann endlich ist, wenn sie nur endlich viele Untergruppen hat.

Aufgabe (4.14) (a) Welche Elemente der Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ haben endliche Ordnung? Ist diese Gruppe endlich erzeugt?

(b) Welche Elemente der Gruppe $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ haben endliche Ordnung? Ist diese Gruppe endlich erzeugt?

Aufgabe (4.15) Es sei X eine beliebige Menge. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X. Zeige, daß $\mathfrak{P}(X)$ mit der Operation

$$A \star B \;:=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

zu einer Gruppe wird, in der jedes Element außer dem Neutralelement die Ordnung 2 hat. (Insbesondere gibt es also unendliche Gruppen, in denen jedes Element außer dem neutralen Element die Ordnung 2 hat.)

Aufgabe (4.16) Bestimme für jede der folgenden Untergruppen U der Gruppe $G = (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ die Elemente von G/U, also die Nebenklassen von G nach U! (Da G kommutativ ist, entfällt die Unterscheidung zwischen Links- und Rechtsnebenklassen.)

(a) $U_1 := (0, \infty) = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$
(b) $U_2 := \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \neq 0\}$
(c) $U_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
(d) $U_4 := \{1, -1\}$
(e) $U_5 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ (mit einer festen Zahl $n \in \mathbb{N}$)

Aufgabe (4.17) Es seien $A, B \leq G$ Untergruppen einer Gruppe G. Zeige, daß die beiden folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) zu je zwei Elementen $g_1, g_2 \in G$ gibt es ein Element $x \in G$ mit $g_1 A = xA$ und $g_2 B = xB$ (d.h., Nebenklassen nach A und B besitzen jeweils einen gemeinsamen Repräsentanten);
(2) es gilt $G = AB$ (d.h., jedes Element $g \in G$ besitzt eine Darstellung $g = ab$ mit $a \in A$ und $b \in B$).

Aufgabe (4.18) Es seien $A, B \leq G$ Untergruppen einer Gruppe G, und es sei $U := \langle\!\langle A \cup B \rangle\!\rangle$ die von A und B erzeugte Untergruppe von G. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Es gilt $[B : A \cap B] \leq [U : A]$. Im Fall $[U : A] < \infty$ gilt Gleichheit genau dann, wenn $U = AB$ gilt.
(b) Es gilt $[G : A \cap B] \leq [G : A] \cdot [G : B]$. (Insbesondere hat $A \cap B$ endlichen Index in G, wenn A und B endlichen Index haben.)
(c) Haben A und B endlichen Index in G, so gilt $[G : A \cap B] = [G : A] \cdot [G : B]$ genau dann, wenn $G = AB$ gilt.
(d) Sind $[G : A]$ und $[G : B]$ teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt $G = AB$.

Hinweise: Betrachte in (a) die Abbildung

$$\varphi : \begin{array}{ccc} B/(A \cap B) & \to & U/A \\ b(A \cap B) & \mapsto & bA \end{array}$$

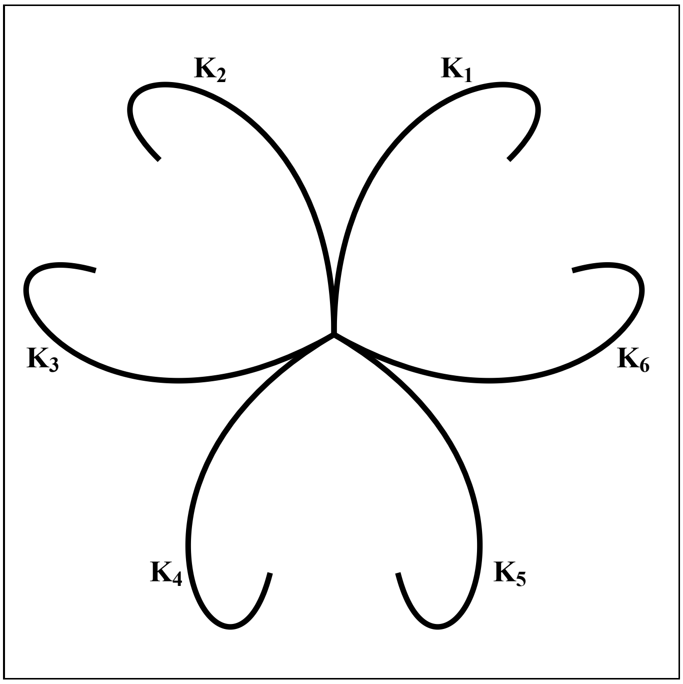
und für (b) die Abbildung

$$\psi : \begin{array}{ccc} G/(A \cap B) & \to & (G/A) \times (G/B) \\ x(A \cap B) & \mapsto & (xA, xB) \end{array}$$

und zeige jeweils, daß die angegebene Abbildung wohldefiniert und injektiv ist.

Aufgabe (4.19) (a) Es seien G die Symmetriegruppe einer geometrischen Figur $\mathfrak{G}$ und $U \leq G$ die Symmetriegruppe einer Teilfigur $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$. Zeige, daß eine Bijektion zwischen der Menge aller (Links- oder Rechts-) Nebenklassen von G nach U und der Menge aller zu $\mathfrak{U}$ kongruenten Teilfiguren von $\mathfrak{G}$ besteht.

(b) Die folgende Figur besteht aus sechs kongruenten Kurven $K_1, \ldots, K_6$. Verifiziere Teil (a) für die Teilfiguren $\mathfrak{U} = \{K_1\}$, $\mathfrak{U} = \{K_1, K_2\}$ sowie $\mathfrak{U} = \{K_1, K_3, K_5\}$.



Teilfiguren einer geometrischen Figur.