3. Übung zu algebraischen Strukturen: Permutationen

Aufgabe (3.1) Die folgenden Wertetabellen definieren drei Permutationen auf der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Gib für jede dieser drei Permutationen die Zyklenzerlegung und eine Darstellung als Produkt von (möglichst wenigen) Transpositionen an!

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe (3.2) Gib für die folgenden Permutationen jeweils die Zyklenzerlegung und eine Darstellung als Produkt von (möglichst wenigen) Transpositionen an!

(a) $(13)(14)(23)$
(b) $(12)(24)(431)$
(c) $(12)(1342)(435)(25)$
(d) $(123)^{-1}(14536)(123)$

Aufgabe (3.3) Wir betrachten die Permutationen α, β und γ der Menge $\{1,\ldots,8\}$, die durch die folgenden Wertetabellen gegeben sind.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Schreibe jede dieser drei Permutationen sowohl als Produkt disjunkter Zyklen als auch als Produkt einer möglichst kleinen Zahl von Transpositionen!

(b) Tue das Gleiche für die Permutationen $\alpha^{-1}\circ\beta\circ\alpha$ und $\alpha\circ\beta\circ\gamma$.

Aufgabe (3.4) Wir betrachten die Permutationen α, β und γ der Menge $\{1,\ldots,11\}$, die durch die folgenden Wertetabellen gegeben sind.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 11 & 6 & 9 & 4 & 3 & 10 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 8 & 3 & 2 & 10 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 7 & 3 & 1 & 2 & 6 & 10 & 4 & 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Schreibe jede dieser drei Permutationen sowohl als Produkt disjunkter Zyklen als auch als Produkt einer möglichst kleinen Zahl von Transpositionen!

(b) Gib für jede der drei Permutationen $\sigma\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ die Signatur an!

(c) Gib für jede der drei Permutationen $\sigma\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ die Ordnung an, also die kleinste Zahl $n\in\mathbb{N}$ mit $\sigma^n=\mathrm{id}$.

Aufgabe (3.5) Es sei $\sigma := (123456)$. Gib für σ, σ^2, σ^3, σ^4 und σ^5 jeweils die Zyklenzerlegung und eine Darstellung als Produkt von (möglichst wenigen) Transpositionen an!

Aufgabe (3.6) Gib die Zyklendarstellung der Permutationen $\sigma\in\mathrm{Sym}_{15}$ an, die durch die folgende Wertetabelle gegeben ist.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 12 & 8 & 7 & 9 & 2 & 1 & 15 & 14 & 11 & 4 & 6 & 3 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

Aufgabe (3.7) Es sei σ eine beliebige, aber fest gewählte Permutation der Menge $X := \{1,2,\ldots,n\}$. Wir definieren dann eine Relation $\sim$ auf X, indem wir festlegen, daß genau dann $i\sim j$ gilt, wenn es eine Zahl $m\in\mathbb{Z}$ gibt mit $j=\sigma^m(i)$. Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Beschreibe die Äquivalenzklassen!

Aufgabe (3.8) Es sei $\sigma = (x_1,x_2,\ldots,x_k)$ ein k-Zyklus. Wie sieht die Zyklendarstellung von σ^{-1} aus?

Aufgabe (3.9) Es seien k und N natürliche Zahlen. Zeige: Ist σ ein Zyklus der Länge Nk, so ist σ^N das Produkt von N Zyklen der Länge k.

Aufgabe (3.10) Zeige, daß für ein Element $\theta\in\mathrm{Sym}_n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind!

(1) θ ist eine Potenz eines n-Zyklus.

(2) Alle Zyklen in der Zyklenzerlegung von θ haben die gleiche Länge.

Aufgabe (3.11) Es sei σ eine Permutation einer endlichen Menge X.

(a) Zeige, daß es eine Zahl $n\in\mathbb{N}$ gibt mit $\sigma^n=\mathrm{id}_X$. (Die kleinste solche Zahl heißt die **Ordnung** von σ.)

(b) Zeige, daß die Gleichung $\sigma^N=\mathrm{id}_X$ mit $N\in\mathbb{Z}$ genau dann gilt, wenn N ein Vielfaches der Ordnung von σ ist.

Aufgabe (3.12) Die **Zyklenstruktur** einer Permutation σ ist das n-Tupel $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, in dem z_k die Anzahl der k-Tupel in einer Darstellung von σ als Produkt disjunkter Zyklen bezeichnet.

(a) Zeige, daß $1\cdot z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3+\cdots+n\cdot z_n=n$ gilt.

(b) Zeige, daß die Ordnung einer Permutation σ das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Zyklenlängen ist, also das kgV der Zahlen z_k mit $z_k\neq 0$.

(c) Zeige, daß zwei Permutationen σ,τ der betrachteten Menge genau dann die gleiche Zyklenstruktur haben, wenn es eine Permutation φ gibt mit $\tau=\varphi\sigma\varphi^{-1}$. (Man sagt dann, die Permutationen σ und τ seien **konjugiert**.)

Aufgabe (3.13) (a) Wie viele Elemente von Sym_{15} haben die Zyklenstruktur $(4,0,1,2,0,\ldots,0)$?

(b) Wie viele verschiedene Elemente in Sym_{19} gibt es, die die Zyklenstruktur $(5,0,2,2,0,\ldots,0)$ besitzen?

Aufgabe (3.14) (a) Wie viele verschiedene k-Zyklen lassen sich aus k beliebig vorgegebenen Elementen in $\{1,\ldots,n\}$ bilden?

(b) Es gelte $1\cdot z_1 + 2\cdot z_2 + \cdots + n\cdot z_n = n$. Wie viele Permutationen mit der Zyklenstruktur $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ gibt es in Sym_n?

(c) Wie viele Permutationen mit der Zyklenstruktur $(0,3,2,2,0,\ldots,0)$ gibt es in Sym_{20}?

Aufgabe (3.15) Ein Stapel von 9 Karten werde dadurch gemischt, daß man die oberen drei Karten (unter Beibehaltung deren Reihenfolge) gegen die unteren beiden austauscht. Wie oft muß dieses Mischen wiederholt werden, bis man wieder die ursprüngliche Anordnung der Karten erhält?

Aufgabe (3.16) Für $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ sei $k(\sigma)$ die Anzahl der Zyklen in der Zyklenzerlegung von σ (wobei Zyklen der Länge 1 mitgezählt werden). Zeige: Ist τ eine Transposition, so gilt $k(\sigma\tau) = k(\sigma) \pm 1$. Wann tritt welches Vorzeichen auf?

Aufgabe (3.17) (a) Zeige, daß ein k-Zyklus als Produkt von $k-1$ Transpositionen geschrieben werden kann, aber nicht als Produkt von weniger als $k-1$ Transpositionen.

(b) Es sei $\sigma = \alpha \circ \beta$ eine Permutation der Menge X, wobei α und β disjunkt seien; d.h., es gebe disjunkte Mengen $A, B \subseteq X$ derart, daß α nur auf Elemente von A und β nur auf Elemente von B wirkt. Zeige, daß in einer Darstellung von σ als Produkt von möglichst wenigen Transpositionen keine Transposition der Form (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$ vorkommt.

(c) Es sei $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ die Zyklenstruktur einer Permutation σ. Zeige, daß sich σ als Produkt von $n - (z_1 + \cdots + z_n)$ Transpositionen schreiben läßt, aber nicht als Produkt von weniger Transpositionen.

(d) Zeige, daß man jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ als Produkt von maximal $n-1$ Transpositionen schreiben kann. Welche Bedingung muß σ erfüllen, damit dies nicht mit weniger als $n-1$ Transpositionen möglich ist?

Aufgabe (3.18) Finde alle Möglichkeiten, die folgende Wertetabelle so zu ergänzen, daß eine *gerade* Permutation der Menge $\{1,\ldots,7\}$ entsteht.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & \star & \star & 3 & \star & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (3.19) Gegeben seien $n-2$ verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_{n-2}$ und $n-2$ verschiedene Elemente $y_1, \ldots, y_{n-2}$ einer n-elementigen Menge X. Zeige, daß es genau eine gerade Permutation σ gibt mit $\sigma(x_k) = y_k$ für $1 \le k \le n-2$.

Aufgabe (3.20) Es sei $m < n$. Jedes Element von Sym_m kann dann auch als Element von Sym_n aufgefaßt werden, indem man einfach $\sigma(k) := k$ für $m+1 \le k \le n$ definiert. Zeige, daß die Signatur von σ nicht davon abhängt, ob man σ als Element von Sym_m oder Sym_n auffaßt.

Aufgabe (3.21) Eine Permutation σ auf einer Menge X heißt **Involution**, falls $\sigma^2 = \mathrm{id}_X$ gilt.

(a) Charakterisiere Involutionen anhand ihrer Zyklenzerlegungen!

(b) Es sei a_n die Anzahl der Involutionen auf einer n-elementigen Menge X. Gib eine möglichst explizite Formel für a_n an und leite die Rekursionsformel $a_{n+1} = a_n + n \cdot a_{n-1}$ her!

Aufgabe (3.22) Es sei X eine n-elementige Menge.

(a) Zeige, daß eine Permutation von X genau dann gerade ist, wenn sie sich als Produkt von Dreierzyklen schreiben läßt. **Hinweis:** Sind a,b,c,d paarweise verschiedene Elemente von X, so gelten die Formeln $(ab)(cd) = (acd)(abd)$ und $(ab)(bc) = (abc)$.

(b) Zeige, daß im Fall $n \ge 3$ eine Permutation von X genau dann gerade ist, wenn sie sich als Produkt von Dreierzyklen der Form $(12k)$ mit $k \ge 3$ schreiben läßt.

Hinweis. Sind $a,b,c \ge 3$ paarweise verschieden, so gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} (1a2) &= (12a)(12a), \\ (1ab) &= (12b)(12a)(12a), \\ (abc) &= (1ab)(1bc). \end{aligned}$$

Aufgabe (3.23) Bei dem unten abgebildeten Verschiebespiel ist die anfängliche Anordnung $1,\ldots,15$ in eine vorgegebene Anordung $\sigma(1),\ldots,\sigma(15)$ zu überführen, indem mehrmals hintereinander ein Zahlenfeld in das jeweils freie Feld verschoben wird.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \\ \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) \\ \sigma(9) & \sigma(10) & \sigma(11) & \sigma(12) \\ \sigma(13) & \sigma(14) & \sigma(15) & \end{bmatrix}$$

(a) Zeige, daß σ eine gerade Permutation sein muß, damit die Verschiebung möglich ist.

(b) Zeige umgekehrt, daß für jede gerade Permutation σ die angegebene Verschiebung auch wirklich möglich ist.

Aufgabe (3.24) Bestimme den Untergruppenverband der alternierenden Gruppe Alt_4, d.h., finde alle Untergruppen von Alt_4 und stelle fest, welche Enthaltenseinsbeziehungen zwischen diesen Untergruppen bestehen.