2. Übung zu algebraischen Strukturen: Rechnen mit Gruppenoperationen

Aufgabe (2.1) Welche der folgenden inneren Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ definieren eine Gruppenstruktur? (Welche der Gruppenaxiome sind erfüllt, welche nicht?)

(a) $x \circ y := (x+y)/2$
(b) $x \circ y := \sqrt{x^2+y^2}$
(c) $x \circ y := \sqrt[3]{x^3+y^3}$
(d) $x \circ y := xy+x+y$
(e) $x \circ y := x$

Aufgabe (2.2) Es sei $(G, \circ)$ eine Halbgruppe. Für ein beliebiges Element $a \in G$ definieren wir die **Linksmultiplikation** $L_a : G \to G$ durch $L_a(x) := ax$ und die **Rechtsmultiplikation** $R_a : G \to G$ durch $R_a(x) := xa$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(1) für je zwei Elemente $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ Lösungen in G;
(2) $(G, \circ)$ ist eine Gruppe;
(3) für je zwei Elemente $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ eindeutige Lösungen in G;
(4) alle Links- und Rechtsmultiplikationen sind bijektiv;
(5) alle Links- und Rechtsmultiplikationen sind surjektiv.

Was bedeutet im Fall einer endlichen Menge G Bedingung (3) für die Verknüpfungstafel von $(G, \circ)$?

Bemerkung. Angelehnt an den speziellen Fall $(G, \circ) = (V, +)$ mit einem Vektorraum V bezeichnet man L_a auch als **Linkstranslation** und R_a als **Rechtstranslation** mit dem Element a.

Aufgabe (2.3) Auf einer sechselementigen Menge $\{u, v, w, x, y, z\}$ definieren wir eine innere Verknüpfung durch die folgende Verknüpfungstafel.

$\cdot$	u	v	w	x	y	z
u	u	v	w	x	y	z
v	v	w	u	y	z	x
w	w	u	v	z	x	y
x	x	y	z	w	v	u
y	y	z	x	v	u	w
z	z	x	y	u	w	v

Zeige, daß es ein eindeutig bestimmtes Neutralelement und zu jedem Element ein eindeutig bestimmtes Inverses gibt und daß das Kommutativgesetz, aber nicht das Assoziativgesetz gilt. (Es liegt also nicht einmal eine Halbgruppe vor.)

Aufgabe (2.4) (a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Wir definieren dann durch

$$a \star b \;:=\; a \cdot b^{-1}$$

eine neue innere Verknüpfung auf G. Zeige, daß diese Verknüpfung die folgenden Eigenschaften hat:

(A) $(a \star c) \star (b \star c) = a \star b$ für alle $a, b, c \in G$;
(B) für alle $a, b \in G$ gibt es ein $x \in G$ mit $a \star x = b$.

(b) Umgekehrt sei auf einer nichtleeren Menge G eine innere Verknüpfung $\star$ mit den Eigenschaften (A) und (B) gegeben. Zeige, daß dann die Elemente $x \star x$ mit $x \in G$ alle gleich sind (sagen wir $x \star x = e$ für alle $x \in G$) und daß durch

$$a \cdot b \;:=\; a \star (e \star b)$$

eine Gruppenoperation auf G definiert ist, für die $a \star b = a \cdot b^{-1}$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, daß man eine Gruppenstruktur statt durch die Eigenschaften der Abbildung $(a, b) \mapsto ab$ auch durch die Eigenschaften der Abbildung $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ charakterisieren kann.

Hinweis: Beweise in (b) nacheinander die folgenden Aussagen!

(1) Es gilt $b \star e = b$ für alle $b \in G$.
(2) Es gilt $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.
(3) Für $a^{-1} := e \star a$ gilt $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.
(4) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Werte dabei zum Nachweis von (4) den Ausdruck

$$\big(a \star (e \star b)\big) \star \Big[\big(e \star (b \star c^{-1})\big) \star \big((e \star c^{-1}) \star (b \star c^{-1})\big)\Big]$$

auf zwei verschiedene Arten aus.

Aufgabe (2.5) Es sei $(S, \circ)$ ein Monoid mit dem Neutralelement e. Ein Element $x \in S$ heißt **invertierbar**, wenn es ein Element $y \in S$ gibt mit $x \circ y = y \circ x = e$. Zeige, daß die Menge der invertierbaren Elemente mit der Operation $\circ$ eine Gruppe ist. Bestimme diese Gruppe in den folgenden Beispielen!

(a) $S = \mathbb{Z}^{2\times 2} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$, $\circ =$ Matrizenmultiplikation
(b) $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, b, c, d \geq 0\}$, $\circ =$ Matrizenmultiplikation
(c) $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\circ =$ Verkettung
(d) $S : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\circ =$ argumentweise Multiplikation

Aufgabe (2.6) Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $x \in G$ ein beliebiges, aber fest gewähltes Element von G. Zeige, daß mit der Verknüpfung $a \star b := axb = a \cdot x \cdot b$ auch $(G, \star)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe (2.7) Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und X eine beliebige Menge. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Funktionen $f : X \to G$ definieren wir eine innere Verknüpfung $\star$ durch $(f_1 \star f_2)(x) := f_1(x) \circ f_2(x)$. Zeige, daß dann $(\mathcal{F}, \star)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe (2.8) Zeige: Gilt in einer Gruppe die Gleichheit $x_1 x_2 \cdots x_n = e$, so gilt auch $x_2 \cdots x_n x_1 = e$. (Dabei bezeichne e das Neutralelement der Gruppe.)

Aufgabe (2.9) Was läßt sich über das Auftreten des Neutralelements e in der Verknüfungstafel einer (endlichen) Gruppe sagen? Wie kann man an der Verknüpfungstafel ablesen, ob die Gruppe kommutativ ist?

Aufgabe (2.10) Es sei G eine endliche n-elementige Gruppe mit dem Neutralelement e. Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_n$ Elemente von G, die nicht notwendigerweise verschieden sind. Zeige, daß es dann Indices $i \leq j$ gibt mit $g_i g_{i+1} \cdots g_j = e$.

Aufgabe (2.11) Es sei G eine Gruppe. Für ein beliebiges Element $a \in G$ definieren wir die **Konjugation** $\kappa_a : G \to G$ durch $\kappa_a(x) := axa^{-1}$. Wir nennen ein Element $y \in G$ **konjugiert** zu einem Element $x \in G$, wenn es ein Element $a \in G$ gibt mit $y = \kappa_a(x)$. Beweise die folgenden Aussagen!

(1) Für alle $a, x, y \in G$ gilt $\kappa_a(xy) = \kappa_a(x)\kappa_a(y)$.
(2) Für alle $a, b \in G$ gilt $\kappa_a \circ \kappa_b = \kappa_{ab}$.
(3) Für alle $a \in G$ ist κ_a bijektiv mit $\kappa_a^{-1} = \kappa_{a^{-1}}$.
(4) Schreiben wir $x \sim y$, wenn y konjugiert zu x ist, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G.

Aufgabe (2.12) Wir sagen, zwei Elemente a und b in einer Gruppe G **kommutieren** miteinander, wenn $ab = ba$ gilt. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Jedes Element von G kommutiert mit sich selbst.
(b) Kommutiert a mit b, dann auch mit b^{-1}.
(c) Kommutiert a mit b, dann auch mit b^k für alle $k \in \mathbb{Z}$.
(d) Kommutiert a mit b_1 und mit b_2, dann auch mit $b_1 b_2$.

Zeige ferner, daß im allgemeinen die Beziehung des Kommutierens nicht transitiv ist; d.h., wenn a mit b kommutiert und b mit c, so folgt nicht, daß a mit c kommutiert.

Aufgabe (2.13) Es sei G eine Gruppe. Für alle Elemente $x, y \in G$ bezeichnen wir das Element

$$[x, y] \ := \ xyx^{-1}y^{-1}$$

als den **Kommutator** von x und y, denn wegen $xy = [x, y]\, yx$ drückt dieses Element aus, wie stark x und y davon abweichen, miteinander zu kommutieren. Beweise die folgenden Rechenregeln für Kommutatoren!

(a) $[x, y]^{-1} = [y, x]$
(b) $x^{-1}[x, y] = \kappa_y(x^{-1})$, $[x, y]y = \kappa_x(y)$
(c) $[xy, z] = \kappa_x([y, z])[x, z]$, $[x, yz] = [x, y]\, \kappa_y([x, z])$
(d) $[x, y^{-1}] = \kappa_x([y^{-1}, x^{-1}])$, $[x^{-1}, y] = \kappa_{x^{-1}}([y, x])$
(e) $\kappa_x\big([[x^{-1}, y],\, z]\big)\kappa_z\big([[z^{-1}, x],\, y]\big)\kappa_y\big([[y^{-1}, z],\, x]\big) = e$

Bemerkung. Die letzte Rechenregel wird nach den Mathematikern Philip Hall (1904-1982) und Ernst Witt (1911-1991) als **Hall-Witt-Identität** bezeichnet. **Warnung:** Manche Autoren bezeichnen nicht $xyx^{-1}y^{-1}$, sondern $x^{-1}y^{-1}xy$ als Kommutator von x und y; die obigen Rechenregeln sind dann entsprechend umzuformulieren.

Aufgabe (2.14) Es seien $a, b, c \in G$ Elemente einer Gruppe G, deren Neutralelement wir mit e bezeichnen. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Aus $aba^{-1} = b^k$ folgt $a^n ba^{-n} = b^{k^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Aus $a^5 = e$ und $aba^{-1} = b^2$ folgt $b^{31} = e$.
(c) Aus $a^{2m+1} = e$ und $aba^{-1} = b^{-1}$ folgt $b^2 = e$.
(d) Aus $ab^2 = b^3 a$ und $a^3 b = ba^2$ folgt $a = b = e$.

Aufgabe (2.15) Es seien $a, b \in G$ Elemente einer Gruppe G. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Genau dann ist die Gleichung $xax = b$ in G lösbar, wenn ab ein Quadrat ist.
(b) Genau dann ist die Gleichung $x^2 ax = a^{-1}$ in G lösbar, wenn a ein Kubus ist, also die dritte Potenz eines Elementes von G.

Aufgabe (2.16) Zeige, daß für eine Gruppe $(G, \cdot)$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) G ist kommutativ;
(2) $(ab)^n = a^n b^n$ für alle $a, b \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$;
(3) es gibt eine Menge $X = \{N, N+1, N+2\}$ dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen mit $(ab)^n = a^n b^n$ für alle $a, b \in G$ und alle $n \in X$;
(4) $(ab)^2 = a^2 b^2$ für alle $a, b \in G$;
(5) $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ für alle $a, b \in G$.

Aufgabe (2.17) Es sei G eine Gruppe, in der es kein Element der Ordnung 3 gibt und in der $(ab)^3 = a^3 b^3$ für alle Elemente $a, b \in G$ gilt. Zeige, daß G kommutativ ist.

Hinweis: Beweise nacheinander folgende Aussagen!

(1) Kommutiert x mit y^3, dann auch mit y.
(2) Jedes Quadrat in G kommutiert mit jedem Element von G.
(3) Jedes Element der Form $\xi = xyx^{-1}y^{-1}$ erfüllt $\xi^2 = e$.
(4) Für alle $x, y \in G$ gilt $xyx^{-1}y^{-1} = e$.

Aufgabe (2.18) (a) Es sei G eine Gruppe mit $x^2 = e$ für alle $x \in G$. Zeige, daß G kommutativ ist.

(b) Gib ein nichttriviales Beispiel für eine Gruppe an, die die in (a) genannte Eigenschaft hat. Gib ferner ein Beispiel für eine kommutative Gruppe G an, die die in (a) genannte Eigenschaft nicht hat.

Aufgabe (2.19) Es sei G eine endliche Gruppe. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Die Anzahl der Elemente $x \in G$ mit $x^2 \neq e$ ist gerade.
(b) Ist $|G|$ gerade, so gibt es in G ein Element $x \neq e$ mit $x^2 = e$.
(c) Ist $|G|$ gerade, so kann nicht jedes Element von G ein Quadrat sein.

Aufgabe (2.20) Finde alle Gruppen mit zwei, drei und vier Elementen!