1. Übung zu algebraischen Strukturen: Symmetriegruppen geometrischer Figuren

Aufgabe (1.1) Die folgenden Buchstaben (aufgefaßt als ebene geometrische Figuren) sollen nach Symmetrietyp klassifiziert werden.

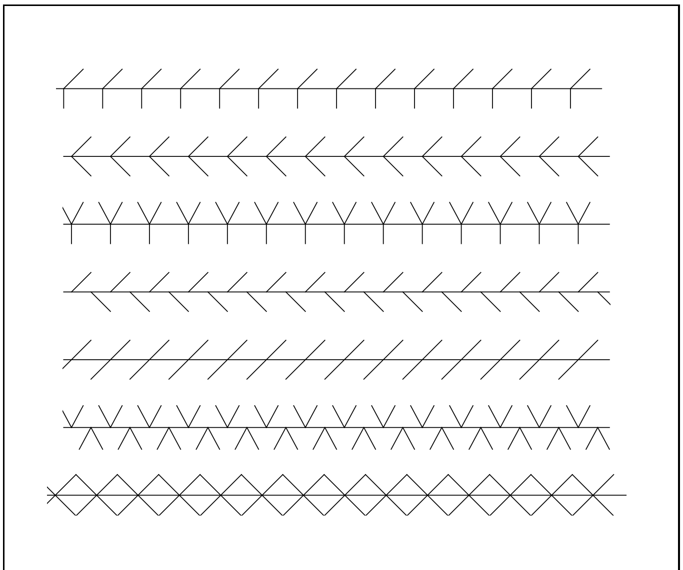
A B C D E F G H I J K L M
N O P Q R S T U V W X Y Z

Mit anderen Worten: Welche dieser Buchstaben haben jeweils gleiche Symmetriegruppen?

Aufgabe (1.2) Wir betrachten ein eindimensionales geometrisches Muster, bei dem eine geometrische Grundfigur unendlich oft aneinandergesetzt wird; man denke etwa an eine Bordüre bei einer Tapete, einem Teppich oder einem Kleidungsstück oder auch an ein Fries entlang eines Bauwerks (jeweils unendlich fortgesetzt). Wie man sich schnell überlegt, kann es (neben der das Muster definierenden Translation und der identischen Abbildung) nur vier Arten von Transformationen geben, die ein solches geometrisches Muster in sich überführen:

- die Spiegelung an der Längsachse;
- die Spiegelung an einer Querachse;
- eine Gleitspiegelung, die durch eine Translation und anschließende Spiegelung an der Längsachse entsteht;
- eine 180^0-Drehung (also eine Punktspiegelung).

Diese Symmetrietransformationen können aber nicht völlig unabhängig voneinander auftreten oder auch nicht auftreten. (Beispielsweise hat ein Muster mit Längsspiegelungssymmetrie automatisch auch Gleitspiegelungssymmetrie.) Zeige, daß es insgesamt sieben verschiedene Symmetrietypen gibt und daß die Muster in der folgenden Abbildung alle möglichen verschiedene Symmetriearten repräsentieren!



Symmetrietypen eindimensionaler geometrischer Muster.

Aufgabe (1.3) Es sei $O = (0,0)$. Wir bezeichnen mit

$$D_\varphi := \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_\varphi := \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

die Drehung um den Winkel φ um O bzw. die Spiegelung an der Achse mit dem Neigungswinkel $\varphi/2$ durch O. Ferner bezeichnen wir mit $D := \{D_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ und mit $S := \{S_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller solchen Drehungen bzw. Spiegelungen. Rechne die folgenden Beziehungen nach!

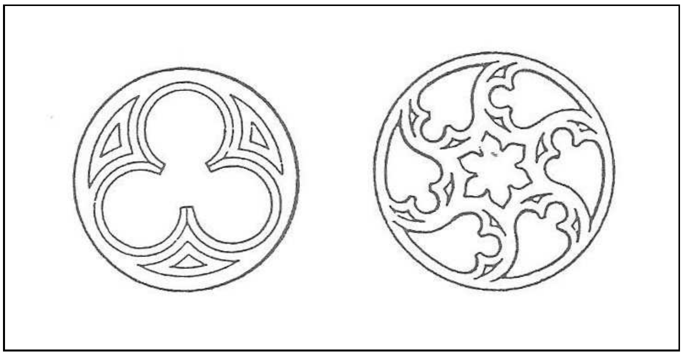
(a) $D_\beta D_\alpha = D_{\beta+\alpha}$
(b) $S_\beta D_\alpha = S_{\beta-\alpha}$
(c) $D_\beta S_\alpha = S_{\beta+\alpha}$
(d) $S_\beta S_\alpha = D_{\beta-\alpha}$

Schließe aus diesen Beziehungen, daß $G := D \cup S$ eine Gruppe ist und daß $U := D$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe (1.4) Gib für folgende Figuren jeweils die Symmetriegruppe an und stelle sie sowohl als Permutationsgruppe als auch als Matrixgruppe dar!

(a) gleichseitiges Dreieck
(b) gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck
(c) Quadrat
(d) nichtquadratisches Rechteck
(e) nichtquadratische Raute

Aufgabe (1.5) Die folgende Abbildung zeigt zwei Beispiele gotischen Maßwerks, ein Dreiblatt (links) und einen Sechsschneuß (rechts). Gib für jede der beiden Figuren die Symmetriegruppe an! In welchem Sinne könnte man sagen, die beiden Figuren haben zwar nicht die gleiche Symmetrie, aber den gleichen Symmetriegrad?



Gotisches Maßwerk.

Aufgabe (1.6) Die **Diedergruppe** D_n ist die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks; sie besteht aus n Drehungen und n Spiegelungen. In dieser Aufgabe soll die Struktur dieser Gruppe untersucht werden.

(a) Es sei D die Drehung (gegen den Uhrzeigersinn) um den Winkel $2\pi/n$. Ferner sei S die Spiegelung an irgendeiner Symmetrieachse des betrachteten n-Ecks. Zeige, daß die Diedergruppe genau aus den Drehungen D^k mit $1 \leq k \leq n$ und den Spiegelungen SD^k mit $1 \leq k \leq n$ besteht.

(b) Zeige, daß die folgenden Relationen gelten!

$$D^n = \mathbf{1}, \quad S^2 = \mathbf{1}, \quad DS \ = \ SD^{n-1}.$$

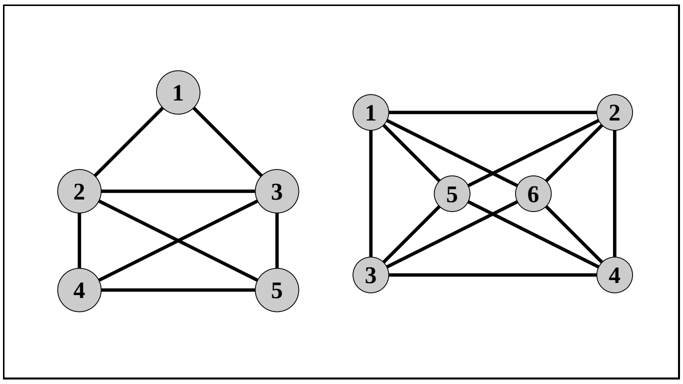
(c) Wir schreiben die Elemente von D_n in der Form $S^a D^k$ mit $a \in \{0,1\}$ und $k \in \{1,\dots,n\}$. Gib an, wie sich in der Formel $(S^a D^k)(S^b D^\ell) = S^c D^m$ die Exponenten c und m aus den Exponenten a, b, k, ℓ berechnen lassen.

Aufgabe (1.7) Bestimme für die folgenden geometrischen Figuren jeweils die Symmetriegruppe!

(a) Würfel
(b) regelmäßiges Oktaeder
(c) Prisma mit rautenförmigem nichtquadratischem Querschnitt

Aufgabe (1.8) Ein **Graph** ist eine Menge von Punkten (Knoten), die durch Verbindungsstrecken (Kanten) miteinander verbunden sind; zwei Punkte können dabei durch mehr als eine Kante miteinander verbunden sein. Ein **Automorphismus** eines Graphen mit der Knotenmenge X ist eine Bijektion $\sigma : X \to X$ derart, daß jeweils $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$ durch genauso viele Kanten miteinander verbunden sind wie i und j.

(a) Begründe, warum die Menge der Automorphismen eines Graphen eine Gruppe bildet (die man als **Automorphismengruppe** des Graphen bezeichnet).
(b) Bestimme die Automorphismengruppen der folgenden Graphen!



Hinweis. Aus einem Graphen Γ, der nur einfache Kanten besitzt, kann man den komplementären Graphen $\overline{\Gamma}$ bilden, der die gleichen Knoten hat wie Γ und der genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten i und j hat, wenn Γ *keine* Kante zwischen diesen Knoten besitzt; es gilt dann $\mathrm{Aut}(\overline{\Gamma}) = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.