2. Hausaufgabenüberprüfung "Mathematische Strukturen" (Montag, 19. Juni 2017)

Aufgabe 1. Bestimme das Innere, den Abschluß und den Rand der Nullstellenmenge N der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t\sin(1/t) & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(Dabei ist N als Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik zu betrachten.)

Aufgabe 2. Begründe, weshalb für zwei beliebige Teilmengen A und B eines metrischen Raums (X, d) die Inklusion $\mathrm{Rd}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Rd}(A) \cup \mathrm{Rd}(B)$ gilt. Wie üblich bezeichnet $\mathrm{Rd}(Y)$ hierbei den Rand einer Teilmenge $Y \subseteq X$. Gilt sogar die Gleichheit $\mathrm{Rd}(A \cup B) = \mathrm{Rd}(A) \cup \mathrm{Rd}(B)$?

Aufgabe 3. Betrachte in der Ebene $\mathbb{R}^2$, versehen mit der euklidischen Metrik, die Folge

$$\begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6} \cdot k\right) \\ \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6} \cdot k\right) \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Handelt es sich um eine konvergente Folge oder um eine Cauchyfolge? Welche Berührungspunkte hat die Menge der Folgenglieder? (Zur Begründung kann geometrisch argumentiert werden.)

Aufgabe 4. (a) Eine Krone mit 6 Zacken soll mit Perlen verziert werden, und zwar so, daß an jeder Zacke eine Perle angebracht wird. Es stehen Perlen in n verschiedenen Farben zur Verfügung. Wie viele ununterscheidbare Färbungen der Krone gibt es?

(b) Wie ändert sich die Antwort, wenn statt der Krone ein Armreif mit 6 gleichmäßig angebrachten Halterungen für die Perlen betrachtet wird?

(c) Gib die Antworten in (a) und (b) jeweils für den Spezialfall $n = 3$ an!

Aufgabe 5. (a) Wir betrachten die Gruppe $G = \{e, a, b, c\}$ mit der folgenden Verknüpfungstafel und die Untergruppe $U = \{e, a\}$. Bestimme die Linksnebenklassen eU, aU, bU, cU sowie die Rechtsnebenklassen Ue, Ua, Ub, Uc. Ist U ein Normalteiler?

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(b) Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{Sym}_4$ und die Untergruppe $U := \{\sigma \in \mathrm{Sym}_4 \mid \sigma(4) = 4\}$. Bestimme alle Linksnebenklassen von U in G. Berechne $(14)^{-1}(123)(14)$! Ist U ein Normalteiler von G?

Aufgabe 6. Ein Element $e \in R$ in einem Ring R heißt linksneutral, wenn $ex = x$ für alle $x \in R$ gilt.

(a) Es sei

$$R \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeige, daß R ein Unterring des Matrizenrings $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist. Ist R sogar in Ideal von $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Finde alle linksneutralen Elemente in R und zeige, daß R kein Neutralelement besitzt.

(b) Es sei R ein Ring, der ein eindeutig bestimmtes linksneutrales Element e besitzt. Berechne für beliebige Elemente $x, y \in R$ den Ausdruck $(xe - x + e)y$ und schließe daraus, daß e sogar ein Neutralelement von R ist.

Lösungen zu den algebraischen Aufgaben

Lösung 4. (a) Die Symmetrieoperationen der Krone sind die Drehungen um 0^0, 60^0, 120^0, 180^0, 240^0 und 300^0. Für jede Drehung g bestimmen wir die Anzahl $a(g)$ der Zacken, für die die Farbe der entsprechenden Perle frei wählbar ist; da n Farben verfügbar sind, ist dann $\chi(g) = n^{a(g)}$ die Anzahl der Fixpunkte von g, also die Anzahl der unter g invarianten Färbungen.

g	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
$a(g)$	6	1	2	3	2	1
$\chi(g)$	n^6	n	n^2	n^3	n^2	n

Nach dem Lemma von Burnside ist die Anzahl ununterscheidbarer Färbungen der Krone dann

$$\begin{aligned} &(n^6+n+n^2+n^3+n^2+n)/6 \\ &= (n^6+n^3+2n^2+2n)/6 \\ &= n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-2n+2)/6\,. \end{aligned}$$

(b) Beim Armreif kommen zu den sechs Drehungen noch sechs Spiegelungen hinzu. Die Positionen der anzubringenden Perlen bilden ein regelmäßiges Sechseck. Es gibt drei Spiegelungen an Geraden, die gegenüberliegende Ecken dieses Sechsecks verbinden; für jede von diesen kann man für 4 der 6 Zacken die Farbe frei wählen, so daß es n^4 Fixpunkte (also invariante Färbungen) gibt. Ferner gibt es drei Spiegelungen an Geraden, die gegenüberliegende Kantenmittelpunkte des Sechsecks verbinden; für jede von diesen kann man für 3 der 6 Zacken die Farbe frei wählen, so daß es n^3 Fixpunkte (also invariante Färbungen) gibt. Nach dem Lemma von Burnside ist die Anzahl ununterscheidbarer Färbungen des Armreifs dann

$$\begin{aligned} &\big((n^6+n^3+2n^2+2n)+(3n^4+3n^3)\big)/12 \\ &= (n^6+3n^4+4n^3+2n^2+2n)/12 \\ &= n(n+1)(n^4-n^3+4n^2+2)/12\,. \end{aligned}$$

(c) Für $n=3$ erhalten wir in (a) die Zahl von 130 ununterscheidbaren Färbungen für die Krone, in (b) die Zahl von 92 ununterscheidbaren Färbungen für den Armreif. (Daß das Ergebnis in (b) kleiner sein würde als dasjenige in (a), war von vornherein klar, denn beim Armreif werden mehr Färbungen miteinander identifiziert als bei der Krone.)

Lösung 5. (a) Wir können sowohl die Links- als auch die Rechtsnebenklassen unmittelbar anhand der Gruppentafel ablesen. Aus der folgenden Abbildung lesen wir die Linksnebenklassen $eU = \{e, a\} = aU$ und $bU = \{b, c\} = cU$ ab.

∘	e	a	b	c	U
e	e	a	b	c	eU
a	a	e	c	b	aU
b	b	c	e	a	bU
c	c	b	a	e	cU

Aus der folgenden Abbildung lesen wir die Rechtsnebenklassen $Ue = \{e, a\} = Ua$ und $Ub = \{b, c\} = Uc$ ab.

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e
U	Ue	Ua	Ub	Uc

Es gilt also $xU = Ux$ für alle $x \in G$, so daß U ein Normalteiler von G ist. (Das ist aber auch ohne jede Rechnung klar, denn G ist kommutativ, und in einer kommutativen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler.)

(b) Es ist $U = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Wir erhalten daher

$$\mathrm{id}\,U = U = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

dann $(14)U = \{(14)\,\mathrm{id}, (14)(12), (14)(13), (14)(23), (14)(123), (14)(132)\}$ und damit

$$(14)U = \{(14), (124), (134), (14)(23), (1234), (1324)\},$$

weiter $(24)U = \{(24)\,\mathrm{id}, (24)(12), (24)(13), (24)(23), (24)(123), (24)(132)\}$ und damit

$$(24)U = \{(24), (142), (13)(24), (234), (1423), (1342)\}$$

sowie schließlich $(34)U = \{(34)\,\mathrm{id}, (34)(12), (34)(13), (34)(23), (34)(123), (34)(132)\}$ und damit

$$(34)U = \{(34), (12)(34), (143), (243), (1243), (1432)\}.$$

Da in diesen vier Nebenklassen alle Elemente von Sym_4 auftreten, sind dies schon sämtliche Linksnebenklassen von U. (Daß die Anzahl der Linksnebenklassen 4 sein würde, war von vornherein klar, denn nach dem Satz von Lagrange gilt $[G : U] = |G|/|U| = 24/6 = 4$.) Es gilt $(123) \in U$, aber

$$(14)^{-1}(123)(14) = (14)(123)(14) = (234) \notin U.$$

Damit ist U kein Normalteiler von G. (Es ist also gar nicht nötig, auch noch die Rechtsnebenklassen zu ermitteln.)

Lösung 6. (a) Die Nullmatrix liegt in R, wegen

$$-\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

führt die Inversenbildung nicht aus R heraus, wegen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

führt die Addition nicht aus R heraus, und wegen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

führt auch die Multiplikation nicht aus R heraus, so daß R ein Unterring von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist. Wegen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \notin R \quad \text{für } (a,b) \neq (0,0)$$

ist R aber kein Ideal von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ein Element $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ von R ist genau dann linksneutral, wenn

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, was genau dann der Fall ist, wenn $a = 1$ gilt. Die linksneutralen Elemente von R sind also alle Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & \star \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Ring R besitzt aber kein rechtsneutrales Element, denn wäre $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ rechtsneutral, so müßte

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und folglich $y = bx$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten, was offensichtlich unmöglich ist.

(b) Weil e linksneutral ist, gilt $(xe-x+e)y = x(ey) - xy + ey = xy - xy + y = y$ für alle $x, y \in R$. Weil y beliebig war, ist also $xe-x+e$ linksneutral. Da nach Voraussetzung e das eindeutig bestimmte linksneutrale Element von R ist, gilt also $xe - x + e = e$ bzw. $xe = x$ für alle $x \in R$. Dies zeigt, daß e auch rechtsneutral und damit sogar ein Neutralelement von R ist.