1. Hausaufgabenüberprüfung “Mathematische Strukturen” (Donnerstag, 11. Mai 2017)

Aufgabe 1. Die Menge $\mathbb{R}^2$ werde versehen mit der Metrik

$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \;:=\; \max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|).$$

Ist das Bild $T(B[0,1])$ der abgeschlossenen Kugel $B[0,1]$ mit Mittelpunkt $0=(0,0)$ und Radius 1 unter der linearen Abbildung

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

beschränkt? (Begründung!)

Aufgabe 2. Die Menge

$$X \;:=\; \left\{-\frac{1}{k}\,\middle|\, k\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\, k\in\mathbb{N}\right\}$$

werde mit der Standardmetrik $d(x,x') := |x-x'|$ versehen. Gib alle offenen Mengen dieses metrischen Raums an!

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe wird der metrische Raum $C([0,1],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit der Metrik

$$d_{\max}(f,g) \;:=\; \max(|f(t)-g(t)| \mid t\in[0,1]\}$$

betrachtet.

(a) Berechne $d_{\max}(e^t, 2t+a)$ für eine beliebige Zahl $a\ge 1$.

(b) Es sei $f(t) := \big(t-(1/4)\big)\big((3/4)-t\big)$. Bestimme einen Radius $r>0$ derart, daß in der offenen Kugel $B(f,r)$ mit Mittelpunkt f ausschließlich Funktionen liegen, die bei $t=1/2$ keine Nullstelle besitzen.

(c) Zeige, daß es keine offene Kugel $B(f,r)$ mit Mittelpunkt $f(t) := \big(t-(1/4)\big)\big((3/4)-t\big)$ gibt, in der ausschließlich Funktionen mit höchstens zwei Nullstellen (in $[0,1]$) liegen.

Aufgabe 4. (a) In der symmetrischen Gruppe Sym_9 betrachten wir die Permutationen

$$\begin{aligned}\alpha &:= (1234)(2345)(3456),\\ \beta &:= (78)(789)(78)(132),\\ \gamma &:= (14987)(659)(23).\end{aligned}$$

Stelle α,β,γ jeweils als Produkt disjunkter Zyklen dar. Stelle dann $\alpha\circ\beta^{-1}\circ\gamma$ als Produkt disjunkter Zyklen, als Produkt möglichst weniger Transpositionen und in Form einer Wertetabelle dar.

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, a,b,c so zu wählen, daß

$$\theta \;:=\; \begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\8&4&a&b&6&1&2&c&9\end{bmatrix}$$

eine gerade Permutation in Sym_9 ist? Gib für $c:=7$ Zahlen a und b so an, daß θ *ungerade* ist.

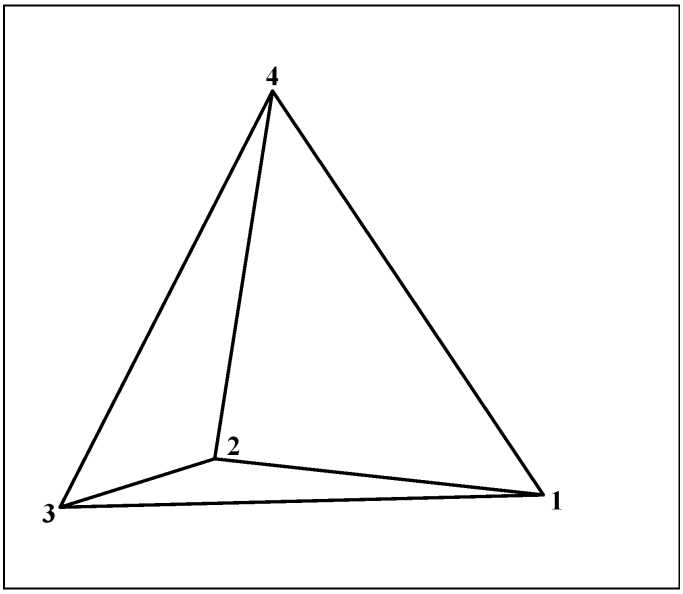
Aufgabe 5. (a) Es seien G_1 und G_2 Gruppen. Zeige, daß das kartesische Produkt

$$G_1\times G_2 \;=\; \{(g_1,g_2)\mid g_1\in G_1,\, g_2\in G_2\}$$

mit der Verknüpfung $(a_1,a_2)\star(b_1,b_2) \;:=\; (a_1b_1,a_2b_2)$ selbst zu einer Gruppe wird. (Diese wird als direktes Produkt der Gruppen G_1 und G_2 bezeichnet.)

(b) Es sei $G := (\{\pm1\},\cdot)$. Bestimme für das direkte Produkt $G\times G$ die Verknüpfungstafel und sämtliche Untergruppen.

Aufgabe 6. Wir betrachten ein reguläres Tetraeder, also eine Pyramide, die von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Es sei G die Symmetriegruppe dieses Tetraeders. Ferner sei U die Untergruppe von G, die aus denjenigen Drehungen besteht, die das Tetraeder in sich überführen.



(a) Eine Symmetrieoperation des Tetraeders ist durch ihre Wirkung auf die 4 Ecken des Tetraeders eindeutig bestimmt, so daß G als Untergruppe der symmetrischen Gruppe Sym_4 aufgefaßt werden kann. Was kann man daraus über die Gruppenordnungen $|G|$ und $|U|$ schließen?

(b) Welche und wie viele Elemente hat die Drehgruppe U? Beschreibe, welche Drehachsen und Drehwinkel auftreten. Gib insbesondere an, welche Drehwinkel wie oft vorkommen!

(c) Gib eine Ebenenspiegelung an, die eine Symmetrieabbildung des Tetraeders ist!

(d) Zeige, daß *jede* Permutation der Ecken durch eine Symmetrieoperation des Tetraeders realisiert (und die Symmetriegruppe des Tetraeders daher mit der Permutationsgruppe Sym_4 identifiziert) werden kann.

Lösungen zu den algebraischen Aufgaben

Lösung 4. (a) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\alpha &= (124356),\\ \beta &= (132)(798),\\ \gamma &= (1496587)(23)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\alpha\beta^{-1}\gamma &= (124356)(897)(231)(1496587)(23)\\ &= (1359)(2)(47)(6)(8)\\ &= (1359)(47) \;=\; (13)(35)(59)(47).\end{aligned}$$

In Form einer Wertetabelle ist $\alpha\beta^{-1}\gamma$ gegeben durch

$$\alpha\beta^{-1}\gamma \;=\; \begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 3&2&5&7&9&6&4&8&1\end{bmatrix}.$$

(b) Damit θ eine Permutation ist, muß $\{a,b,c\} = \{3,5,7\}$ gelten. Für jede der drei möglichen Wahlen für c ergeben sich genau zwei Wahlmöglichkeiten für das Paar (a,b); von diesen liefert die eine eine gerade, die andere eine ungerade Permutation. Es gibt also genau drei Möglichkeiten für (a,b,c), um eine gerade Permutation zu erhalten.

Nun sei $c := 7$. Wir wählen auf gut Glück $(a,b) = (3,5)$ und erhalten dann

$$\theta \;=\; \begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 8&4&3&5&6&1&2&7&9\end{bmatrix}$$

und damit $\theta = (1872456) = (18)(87)(72)(24)(45)(56)$. Dies ist eine *gerade* Permutation. Um eine ungerade Permutation zu halten, müssen wir also genau die andere mögliche Wahl treffen, nämlich $(a,b) = (5,3)$.

Lösung 5. (a) Weil sowohl in G_1 als auch in G_2 das Assoziativgesetz gilt, ist auch $\star$ assoziativ, denn

$$\begin{aligned}&\big((a_1,a_2)\star(b_1,b_2)\big)\star(c_1,c_2)\\ &= (a_1b_1,a_2b_2)\star(c_1,c_2) \;=\; \big((a_1b_1)c_1,(a_2b_2)c_2\big)\\ &= \big(a_1(b_1c_1),a_2(b_2c_2)\big) \;=\; (a_1,a_2)\star(b_1c_1,b_2c_2)\\ &= (a_1,a_2)\star\big((b_1,b_2)\star(c_1,c_2)\big).\end{aligned}$$

Ist e_1 das Neutralelement von G_1 und ist e_2 das Neutralelement von G_2, so ist offensichtlich $e := (e_1,e_2)$ Neutralelement für $G_1\times G_2$. Ist ferner (g_1,g_2) ein beliebiges Element von $G_1\times G_2$, so existieren die Inversen g_1^{-1} von g_1 in G_1 und g_2^{-1} von g_2 in G_2, und es ist klar, daß dann (g_1^{-1},g_2^{-1}) invers zu (g_1,g_2) in $G_1\times G_2$ ist. Damit sind alle Gruppenaxiome nachgeprüft.

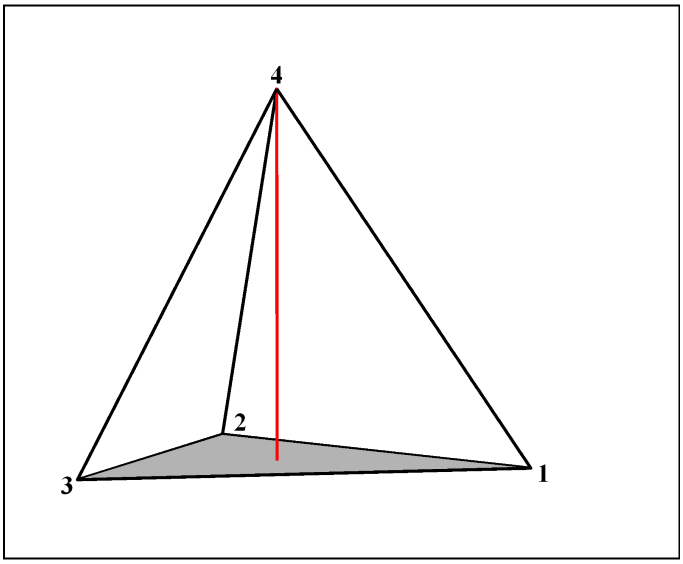
(b) Die Verknüpfungstafel sieht folgendermaßen aus.

$\cdot$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$
$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$	$(1,1)$	$(-1,1)$
$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,1)$

Nach dem Satz von Lagrange kann es außer den trivialen Untergruppen $\{(1,1)\}$ und $\{\pm1\}\times\{\pm1\}$ nur zweielementige Untergruppen geben, also solche, die von einem Element der Ordnung 2 erzeugt werden. Nun hat jedes Element außer $(1,1)$ die Ordnung 2; die einzigen nichttrivialen Untergruppen von G sind daher $\{(1,1),(-1,1)\}$, $\{(1,1),(1,-1)\}$ und $\{(1,1),(-1,-1)\}$.

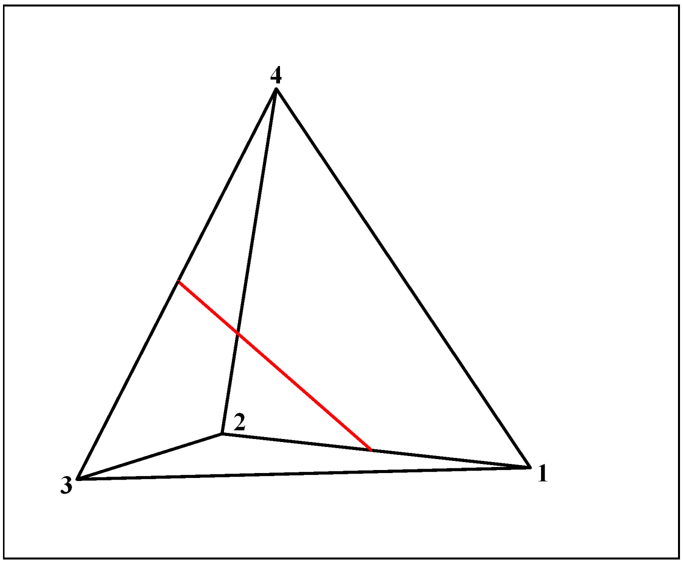
Lösung 6. (a) Die Gruppe Sym_4 hat $4! = 24$ Elemente; nach dem Satz von Lagrange muß also $|G|$ ein Teiler von 24 sein (und $|U|$ ein Teiler von $|G|$).

(b) Es sei g eine Gerade, die eine Ecke des Tetraeders mit dem Schwerpunkt der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite verbindet. Um eine solche Gerade sind die Drehungen um 120^0 und um 240^0 Symmetrieoperationen des Tetraeders.



Symmetrieachse des Tetraeders, um die Drehungen um 120^0 und 240^0 das Tetraeder in sich überführen.

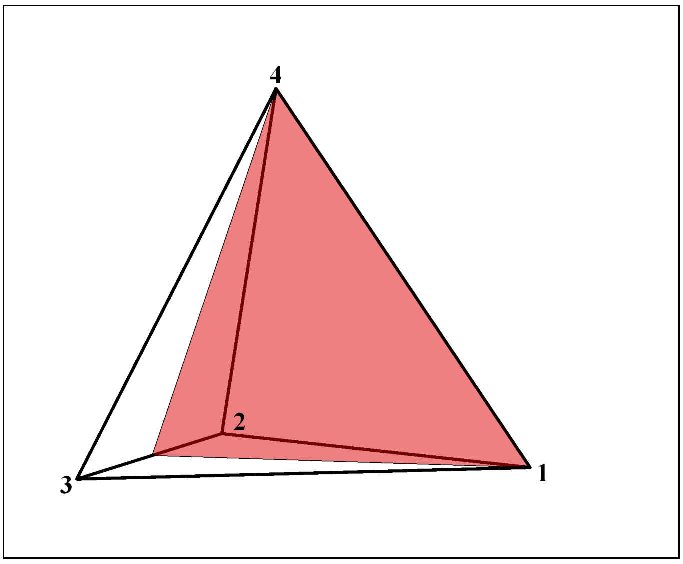
Da es 4 solcher Geraden gibt, liefert dies $4\cdot 2 = 8$ Drehungen. Zusammen mit der Identität (die als 0^0-Drehung um eine beliebige Achse aufgefaßt werden kann) haben wir damit schon 9 Elemente von U gefunden. Da $|U|$ nach dem Satz von Lagrange ein Teiler von 24 sein muß, bleiben nur die Möglichkeiten $|U| = 12$ und $|U| = 24$. Es muß also mindestens drei weitere Drehungen geben, die das Tetraeder in sich überführen. Ist g eine Verbindungsgerade gegenüberliegender Kantenmittelpunkte, so ist die 180^0-Drehung um g eine Symmetrieoperation des Tetraeders.



Symmetrieachse des Tetraeders, um die eine 180^0-Drehung das Tetraeder in sich überführt.

Da es 3 solcher Geraden gibt, liefert dies 3 weitere Drehungen. Damit haben wir $8 + 1 + 3 = 12$ Drehungen gefunden, die das Tetraeder in sich abbilden. Mehr kann es nicht geben, weil es auch Elemente in $G \setminus U$ gibt (beispielsweise Ebenenspiegelungen, die das Tetraeder in sich überführen).

(c) Ist E eine Ebene, die eine Kante des Tetraeders und den Mittelpunkt der dieser gegenüberliegenden Kante enthält, so ist die Spiegelung an E ein Element von G.



Ebene, bezüglich der das Tetraeder spiegelsymmetrisch ist.

(d) Sind $D_1, \ldots, D_{12}$ die in (b) gefundenen Drehungen und ist S irgendeine der in (c) gefundenen Spiegelungen, so sind die Elemente D_i und SD_i mit $1 \leq i \leq 12$ paarweise verschiedene Elemente von G. Da es nach (a) mehr als 24 Elemente in G nicht geben kann, haben wir daher $|G| = 24$. Also lassen sich alle 24 Permutationen der Ecken des Tetraeders durch Symmetrieoperationen dieses Tetraeders realisieren.

Bemerkung. Jede Kante des Tetraeders bestimmt eine Ebene wie in (c). Da es 6 Kanten gibt, gibt es also 6 Ebenenspiegelungen, die das Tetraeder invariant lassen. Bei den restlichen 6 Elementen von $G \setminus U$ handelt es sich um Drehspiegelungen.