Hochschule RheinMain SS 2017
Prof. Dr. D. Lehmann

**8. Übungsblatt zur Vorlesung**
**Lineare Optimierung**

**1.Aufgabe:** In dieser Aufgabe wollen wir das folgende LOP mit Zufallszahlen in Standard-Ungleichungsform als Funktion von $n$ und $m$ betrachten. Dabei ist $n$ die Anzahl der Variablen, also $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, und $m$ ist die Anzahl der Nebenbedingungen, die Anzahl der Ungleichungen, die erfüllt sein müssen. Als zu maximierende Funktion wählen wir einfach die Summe der $x_i$'s,

$$F(\vec{x}) \;:=\; x_1 + x_2 + \cdots + x_n \stackrel{!}{\to} \max \tag{1}$$

unter den Nebenbedingungen $A\vec{x} \leq \vec{b}$ und $\vec{x} \geq \vec{0}$ oder explizit in Koordinaten

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &\leq b_m \end{aligned} \tag{2}$$

und $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, ..., n$. Dabei sei die Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen. Wenn wir etwa haben wollen, dass, rein grössenordnungsmässig, das Maximum durch $x_i = O(1)$ und damit $\max F = O(n)$ gegeben ist, dann wäre eine sinnvolle rechte Seite $\vec{b}$ durch die Summe von $n$ auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen gegeben. Der Mittelwert von so einer Summe ist $n/2$ und die Streuung um den Mittelwert herum ist proportional zu $\sqrt{n}$. Deshalb wählen wir für die $b_i$'s etwa auf dem Intervall $[n/2 - \sqrt{n}, n/2 + \sqrt{n}]$ gleichverteilte Zufallszahlen. Starten Sie jetzt eine R-Session und führen Sie folgende Berechnungen durch:

**a)** Legen Sie die Variablen $n = 40$ und $m = 200$ und den Vektor $\vec{c} = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^{n=40}$ an.

**b)** Erzeugen Sie die Matrix $A$ und den Vektor $\vec{b}$. Schauen Sie sich dazu gegebenenfalls noch einmal in dem file `Introduction-R-with-LinOpt-Examples.R` um, was Sie von der Vorlesungs-homepage herunterladen können.

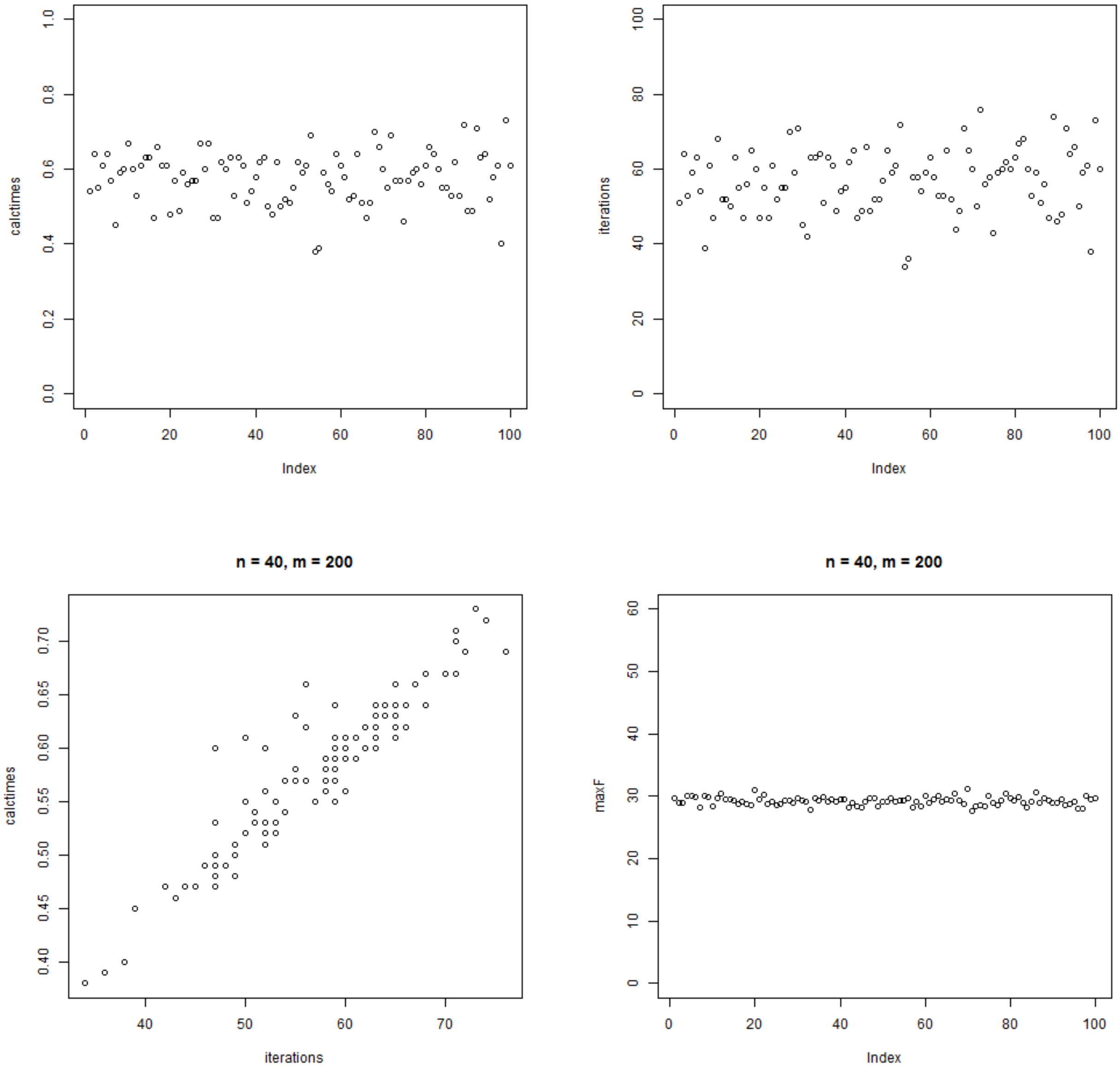
**c)** Laden Sie das `linprog`-Package und lösen Sie das LOP (1),(2) von oben mit Hilfe der `solveLP()`-Funktion. Schreiben Sie die Resultate der `solveLP()`-Funktion in die Variable `res`.

**d)** Geben Sie den Befehl `names(res)` ein und versuchen Sie herauszufinden, was die Grössen `opt`, `iter2` und `solution` bedeuten und wie man die konkreten Werte dafür anzeigen kann.

**e)** Wir wollen jetzt das LOP für 100 verschiedene Realisierungen von $A$ und $\vec{b}$ lösen und uns jeweils die Anzahl der Iterationen `iter2` und die benötigte Rechenzeit merken. Initialisieren Sie dazu die Vektoren

$$\begin{aligned} \texttt{calctimes} &= \texttt{rep}(0, 100) && (3) \\ \texttt{iterations} &= \texttt{rep}(0, 100) && (4) \\ \texttt{maxF} &= \texttt{rep}(0, 100) && (5) \end{aligned}$$

und programmieren Sie eine Schleife, in der dann 100 mal die Schritte (b) und (c) ausgeführt werden (das Package müssen Sie nur 1 mal laden). Schreiben Sie die Rechenzeiten, die Anzahl der Iterationen und das jeweilige Maximum von $F$ in die Vektoren (3), (4) und (5). Sie sollten in der Lage sein, folgende Plots zu reproduzieren:



Die Rechenzeiten können Sie mit folgender Sytax berechnen:

$$\begin{aligned}
\texttt{calctime} &= \texttt{Sys.time}() \\
&\quad (\textit{...then solving the LOP...}) \\
\texttt{calctime} &= \texttt{Sys.time}() - \texttt{calctime}
\end{aligned}$$

**f)** Jetzt wollen wir $n$ und $m$ variieren und wieder Rechenzeiten, Iterationen und den Wert des Maximums jeweils speichern. Und zwar soll

$$n \in \{10, 20, \cdots, 90, 100\}, \qquad m \in \{200, 220, 240, \cdots, 380, 400\},$$

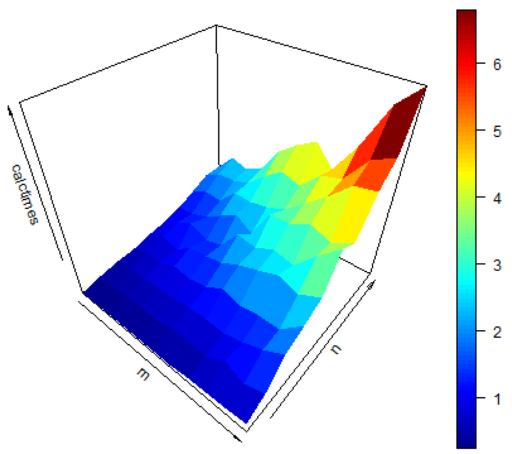
wir haben also 10 verschiedene $n$'s und 11 verschiedene $m$'s. Initialisieren Sie die Matrizen

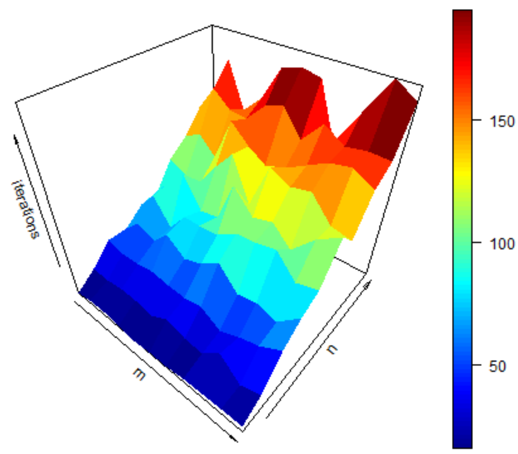
$$\texttt{calctimes} = \texttt{matrix}(0, \texttt{ncol} = 10, \texttt{nrow} = 11) \tag{6}$$
$$\texttt{iterations} = \texttt{matrix}(0, \texttt{ncol} = 10, \texttt{nrow} = 11) \tag{7}$$
$$\texttt{maxF} = \texttt{matrix}(0, \texttt{ncol} = 10, \texttt{nrow} = 11) \tag{8}$$
$$\texttt{bincoeff} = \texttt{matrix}(0, \texttt{ncol} = 10, \texttt{nrow} = 11) \tag{9}$$

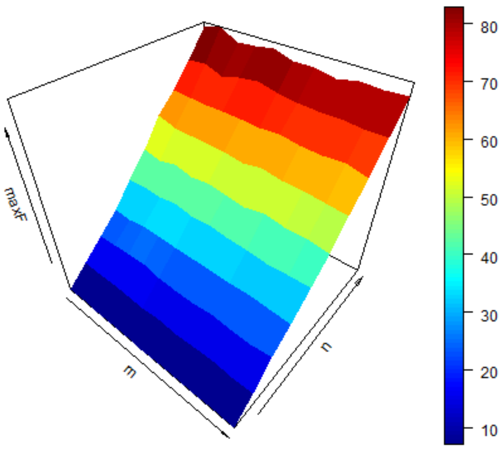
und programmieren Sie einen Doppel-Loop über $n$ und $m$, in dem Sie dann jeweils das LOP für die gegebenen Werte von $n$ und $m$ lösen und die entsprechenden Werte in die Matrizen (6-9) schreiben. Dabei soll in `bincoeff` einfach der Binomialkoeffizient

$$\binom{n+m}{m} = \text{Anzahl der möglichen Ecken}$$

eingetragen werden, den Sie dann etwa mit der Anzahl der benötigten Iterationen vergleichen können. Mit Hilfe des `persp3D()`-Befehls aus dem `plot3D`-Package sollten Sie in der Lage sein, folgende Bilder zu reproduzieren (nicht ganz exakt diesselben, wir haben ja mit Zufallszahlen gerechnet):






Schauen Sie sich ebenfalls die numerischen Werte von `iterations` und `bincoeff` in dem Konsolen-Fenster an:

```
> iterations
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
 [1,]   10   35   36   76   75   83  112   99  142   145
 [2,]   12   24   46   65   76   98   94  150  145   147
 [3,]    7   28   39   54   83  119  112  136  179   199
 [4,]   13   20   38   72   87   85  126  168  120   157
 [5,]   14   28   36   68  115  115  136  177  160   201
 [6,]   11   37   46   65   96  110  122  181  150   196
 [7,]   13   34   43   58   97  101  122  170  182   208
 [8,]   13   27   41   70   72  126  152  134  184   218
 [9,]   15   27   49   80   80  121  144  158  168   190
[10,]   14   36   49   67   71  115  109  184  183   229
[11,]    9   29   46   77   72   99  161  150  145   213
> bincoeff
          [,1]     [,2]     [,3]     [,4]     [,5]     [,6]     [,7]     [,8]      [,9]     [,10]
 [1,] 3.70e+16 1.19e+28 3.71e+37 6.32e+45 1.35e+53 5.84e+59 7.05e+65 2.97e+71  5.15e+76  4.16e+81
 [2,] 9.36e+16 7.32e+28 5.34e+38 2.06e+47 9.59e+54 8.83e+61 2.20e+68 1.87e+74  6.38e+79  9.93e+84
 [3,] 2.19e+17 3.87e+29 6.17e+39 5.05e+48 4.88e+56 9.04e+63 4.45e+70 7.27e+76  4.67e+82  1.34e+88
 [4,] 4.79e+17 1.80e+30 5.94e+40 9.79e+49 1.86e+58 6.64e+65 6.16e+72 1.86e+79  2.17e+85  1.11e+91
 [5,] 9.91e+17 7.50e+30 4.87e+41 1.55e+51 5.54e+59 3.65e+67 6.15e+74 3.32e+81  6.80e+87  6.03e+93
 [6,] 1.95e+18 2.84e+31 3.48e+42 2.04e+52 1.33e+61 1.56e+69 4.62e+76 4.31e+83  1.50e+90  2.24e+96
 [7,] 3.68e+18 9.91e+31 2.20e+43 2.31e+53 2.63e+62 5.36e+70 2.70e+78 4.23e+85  2.45e+92  5.97e+98
 [8,] 6.68e+18 3.21e+32 1.25e+44 2.27e+54 4.41e+63 1.51e+72 1.26e+80 3.23e+87  3.03e+94 1.18e+101
 [9,] 1.17e+19 9.74e+32 6.47e+44 1.97e+55 6.35e+64 3.56e+73 4.81e+81 1.97e+89  2.93e+96 1.79e+103
[10,] 2.00e+19 2.79e+33 3.07e+45 1.53e+56 7.99e+65 7.17e+74 1.53e+83 9.86e+90  2.27e+98 2.13e+105
[11,] 3.31e+19 7.57e+33 1.35e+46 1.08e+57 8.90e+66 1.25e+76 4.15e+84 4.10e+92 1.44e+100 2.04e+107
> |
```