13. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Optimierung

1.Aufgabe: Wir betrachten noch einmal das LOP aus dem Standard-Beispiel

$$F(x,y) \;:=\; 300x + 500y \overset{!}{\to} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 170 \\ x + y &\leq 150 \\ 3y &\leq 180 \\ x,\ y &\geq 0\,. \end{aligned}$$

a) Wie lautet das zu diesem LOP duale LOP?

b) Bringen Sie das duale LOP aus (a) auf Standard-Gleichungsform und zeigen Sie, dass man als zugehöriges Start-Tableau das Tableau

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & s_1 & s_2 & \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 500 \\ 170 & 150 & 180 & 0 & 0 & \mathrm{FD} \end{array} \tag{1}$$

wählen kann. Dabei bezeichnet FD die duale Zielfunktion.

c) Lösen Sie jetzt das duale LOP mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Wählen Sie dazu das Tableau (1) aus Teil (b) als das Start-Tableau und wählen Sie weiterhin

$$B_0 \;:=\; \{\,2\,,\,3\,\}$$

als eine Start-Basis. Wenn Sie das tun, benötigen Sie keine Phase-I-Prozedur. Was ist das Minimum der dualen Zielfunktion FD und wo wird es angenommen? In dem End-Tableau können Sie ebenfalls die Optimallösung $\vec{x}_{\mathrm{opt}}$ des primalen Problems ablesen, wo genau?

2.Aufgabe: Wir betrachten noch einmal das Optimierungsproblem aus Aufgabe 3b,c vom Übungsblatt 1: Gegeben seien n Daten $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$g(\mu) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| \;\overset{!}{\to}\; \min \tag{2}$$

..bitte wenden

In Aufgabe 1 von Übungsblatt 9 haben wir dieses Problem als LOP in Standard-Ungleichungsform geschrieben. Dieses lautete mit $\mu = \mu_1 - \mu_2$: Seien

$$\begin{aligned} \vec{y} &:= (\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^{n+2} \\ \vec{c} &:= (1, 1, \cdots, 1, 0, 0) \;=:\; (\vec{e}, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+2} \end{aligned}$$

mit $\vec{e} := (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$F(\vec{y}) \;=\; \vec{c} \cdot \vec{y} \overset{!}{\to} \min \tag{3}$$

unter den Nebenbedingungen

$$A\vec{y} \;\le\; \vec{b}, \qquad \vec{y} \;\ge\; \vec{0} \tag{4}$$

mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -Id_{n\times n} & \vec{e} & -\vec{e} \\ -Id_{n\times n} & -\vec{e} & \vec{e} \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{2n\times(n+2)}, \qquad \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{2n}.$$

a) Geben Sie das zu diesem LOP (3,4) duale LOP an. Beachten Sie dabei, dass das primale LOP von der Form $\tilde{c} \cdot \tilde{x} \to \max$ (also nicht $\to \min$) sein muss.

b) Zeigen Sie, dass sich das duale LOP auf die folgende Form bringen lässt: Gesucht sind $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \ge \vec{0}$ und $\vec{v} \ge \vec{0}$ und:

$$\mathrm{FD}\,(\vec{u}, \vec{v}) \;=\; \vec{x} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \overset{!}{\to} \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$u_i + v_i \;\le\; 1 \quad \forall\, 1 \le i \le n$$

und

$$\textstyle\sum_{i=1}^n u_i \;=\; \sum_{i=1}^n v_i\,.$$

c) Wir nehmen wieder an, dass $n = 2m - 1$ und

$$0 < x_1 < \cdots < x_m < \cdots < x_{2m-1} = x_n$$

so dass die Funktion $g(\mu)$ in (2) durch

$$\mu_{\text{opt}} \;=\; \text{median}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; x_m$$

minimiert wird. Zeigen Sie, dass dann eine Lösung des dualen Problems gegeben ist durch $\mathrm{FD}\,(\vec{u}_{\text{opt}}, \vec{v}_{\text{opt}})$ mit

$$\begin{aligned} \vec{u}_{\text{opt}} &:= (1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \vec{v}_{\text{opt}} &:= (0, \cdots, 0, 0, 1, \cdots, 1) \end{aligned}$$

wobei $\vec{u}_{\text{opt}}$ und $\vec{v}_{\text{opt}}$ in der Form $\vec{u}_{\text{opt}} \;=\; (u_1, \cdots, u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_{2m-1})$ angegeben sind.

d) Überprüfen Sie Ihre Resultate mit einer R-Simulation. Wählen Sie dazu etwa $n = 9$ und etwa `x = sort( runif(n,min=0,max=10) )`.