Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2017

Lösungen 5. Übungsblatt
Lineare Optimierung

1.Aufgabe: Beweisen Sie das Lemma 4.4 aus der Vorlesung: Sind $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, dann gilt:

a) $M_1 \cap M_2$ ist konvex.

b) $M_1 \cup M_2$ ist nicht notwendig konvex. Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Beweis a) Seien $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aus $M_1 \cap M_2$, also $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M_1$ und $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M_2$. Da M_1 und M_2 nach Voraussetzung konvex sind, ist dann auch für alle $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\vec{x}_\lambda \;:=\; \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \;\in\; M_1$$

und

$$\vec{x}_\lambda \;=\; \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \;\in\; M_2$$

also $\vec{x}_\lambda \in M_1 \cap M_2$, also ist $M_1 \cap M_2$ konvex.

Gegenbeispiel zu b) Hier kann man etwa einfach die disjunkte Vereinigung von zwei konvexen Mengen nehmen, etwa M_1 ist der Kreis mit Radius 1 um $(0,0)$ in der (x,y)-Ebene und M_2 ist der Kreis mit Radius 1 um $(8,0)$ in der (x,y)-Ebene, dann sind offensichtlich

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 \;&:=\; (0,0) \;\in\; M_1 \subset M_1 \cup M_2 \\ \vec{x}_2 \;&:=\; (8,0) \;\in\; M_2 \subset M_1 \cup M_2\end{aligned}$$

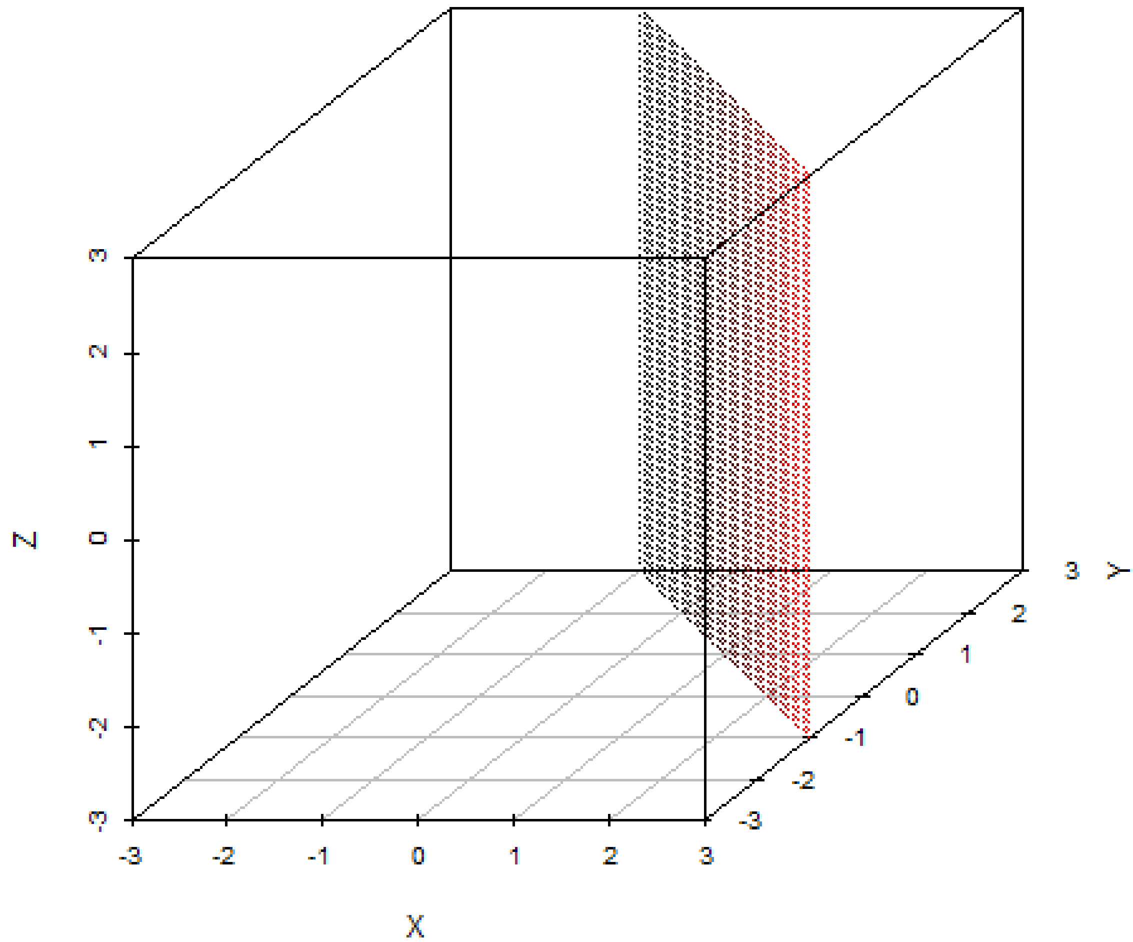
aber

$$\vec{x}_{\lambda=1/2} \;:=\; \tfrac{1}{2}\vec{x}_1 + \left(1-\tfrac{1}{2}\right)\vec{x}_2 \;=\; (4,0)$$

ist weder in M_1 noch in M_2 enthalten, also auch nicht in $M_1 \cup M_2$, also $M_1 \cup M_2$ ist nicht konvex.

..weiter auf der nächsten Seite

2.Aufgabe: Für die Hyperebene bekommt man folgendes Bild:



und der Halbraum ist gegeben durch den gesamten Bereich links von der Ebene.

3.Aufgabe: Beweisen Sie den Satz 4.6 aus der Vorlesung:

a) Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

b) Jeder Halbraum im $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

Beweis a) Jede Hyperebene ist gegeben durch

$$H_=(\vec{a}, b) \quad = \quad \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{a} \cdot \vec{x} = b\,\}$$

mit einem $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aus $H_=(\vec{a}, b)$. Also

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{x}_1 &= b \\ \vec{a} \cdot \vec{x}_2 &= b \end{aligned}$$

Mit $\vec{x}_\lambda := \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2$ gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{x}_\lambda &= \vec{a} \cdot \left[\lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2\right] \\ &= \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{x}_1 + (1-\lambda)\, \vec{a} \cdot \vec{x}_2 \\ &= \lambda\, b + (1-\lambda)\, b \;=\; b \end{aligned}$$

also ist auch $\vec{x}_\lambda \in H_=(\vec{a}, b)$ (sogar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, nicht nur für $0 \leq \lambda \leq 1$ wie für die Konvexität gefordert), also ist $H_=(\vec{a}, b)$ konvex.

Beweis b) Jeder Halbraum ist gegeben durch

$$H_\leq(\vec{a}, b) \;=\; \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\,\}$$

mit einem $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. Seien $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aus $H_\leq(\vec{a}, b)$. Also

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{x}_1 &\leq b \\ \vec{a} \cdot \vec{x}_2 &\leq b \end{aligned}$$

Mit $\vec{x}_\lambda := \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2$ gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{x}_\lambda &= \vec{a} \cdot \left[\lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2\right] \\ &= \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{x}_1 + (1-\lambda)\, \vec{a} \cdot \vec{x}_2 \\ &\leq \lambda\, b + (1-\lambda)\, b \;=\; b \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile benötigen, dass sowohl λ als auch $1-\lambda$ positiv sind, was aber erfüllt ist für $0 \leq \lambda \leq 1$. Also ist $\vec{a} \cdot \vec{x}_\lambda \leq b$ und damit $\vec{x}_\lambda \in H_\leq(\vec{a}, b)$, also ist $H_\leq(\vec{a}, b)$ konvex.

..weiter auf der nächsten Seite

4.Aufgabe: Man bekommt folgendes Bild: