Hochschule RheinMain SS 2017
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 4. Übungsblatt Lineare Optimierung

1.Aufgabe: Die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x+2y &\leq 170 \\ x+y &\leq 150 \\ 3y &\leq 180 \\ x,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

sind äquivalent zu

$$\begin{aligned} x+2y+s_1 &= 170 \\ x+y+s_2 &= 150 \\ 3y+s_3 &= 180 \\ x,\ y,\ s_1,\ s_2,\ s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

und die Zielfunktion können wir schreiben als

$$F(x,y,s_1,s_2,s_3) \;=\; 300x+500y+0s_1+0s_2+0s_3 \overset{!}{\to} \max$$

Also lautet die Standard-Gleichungsform

$$F(\tilde{x}) \;=\; \tilde{c}\cdot\tilde{x} \overset{!}{\to} \max$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &= \tilde{b} \\ \tilde{x} &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

und den Definitionen

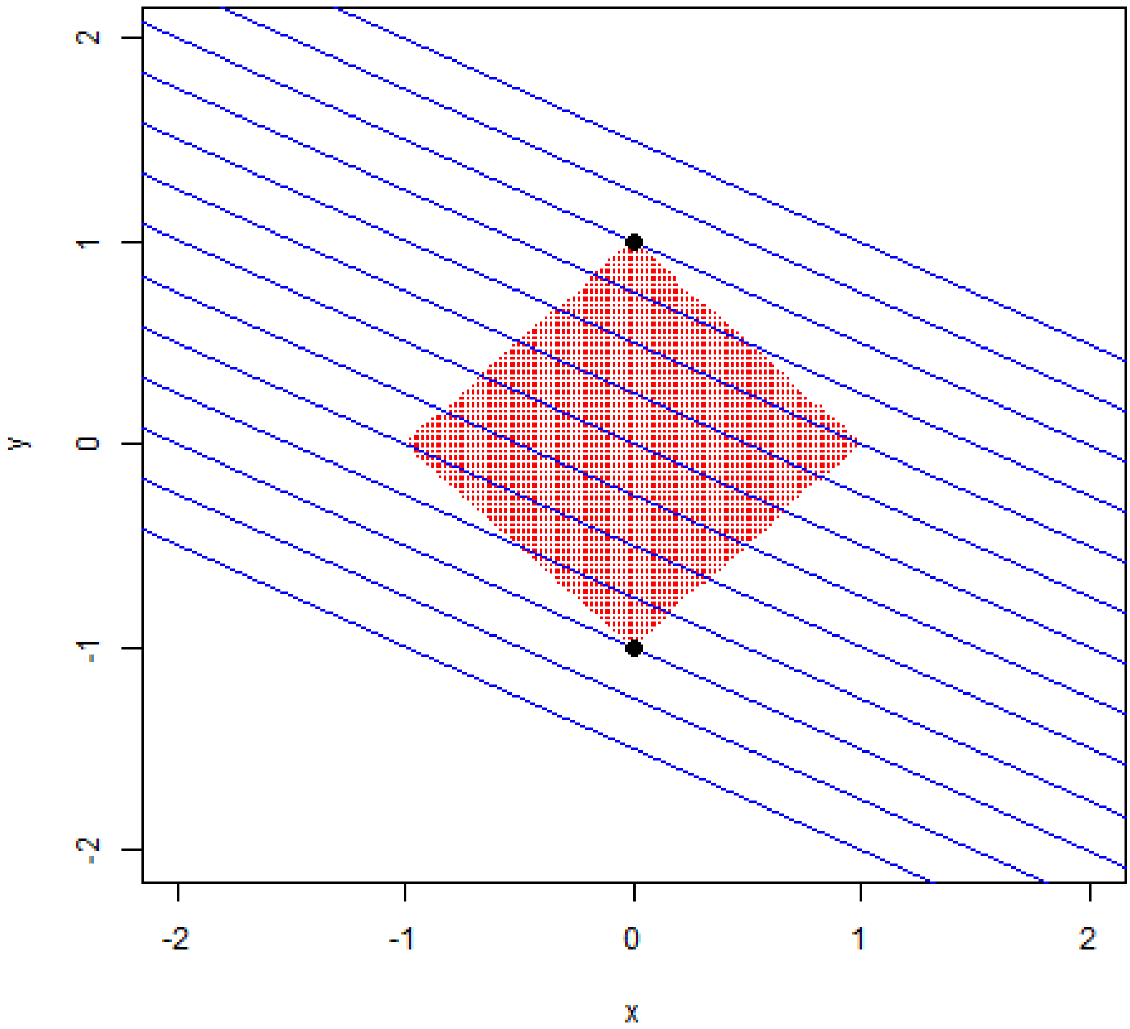
$$\begin{aligned} \tilde{x} \;=\; (\vec{x},\vec{s}) &:= (x,y,s_1,s_2,s_3) \\ \tilde{c} \;=\; (\vec{c},\vec{0}) &:= (300,500,0,0,0) \end{aligned}$$

und

$$\tilde{A} := (A, Id) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} := \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} 170 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass die Standard-Gleichungsform ein Problem im $\mathbb{R}^5$ ist, wohingegen die Standard-Ungleichungsform ein Problem im $\mathbb{R}^2$ ist.

2.Aufgabe: **a)** Man bekommt folgendes Bild (Höhenlinien der Zielfunktion in blau):



Das Maximum liegt bei $(x, y) = (0, 1)$ und beträgt 2 und das Minimum liegt bei $(x, y) = (0, -1)$ mit dem Wert -2.

b) Die Betragsstriche sollen verschwinden: Die Ungleichung $|x| \leq 1$ ist äquivalent zu $x \leq 1$ und $-x \leq 1$. Also ist die Nebenbedingung

$$|x| + |y| \leq 1$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} x + y &\leq 1 \\ -x + y &\leq 1 \\ x - y &\leq 1 \\ -x - y &\leq 1 \end{aligned}$$

c) Bei der Standard-Ungleichungsform müssen alle Variablen die Randbedingung `variable >= 0` erfüllen, das ist bei den x und y aus Teil (b) offensichtlich nicht der Fall was man auch sofort an dem Bild aus Teil (a) oben, der rote Bereich enthält Punkte mit negativen Koordinaten, erkennt. Wir benutzen den Trick aus der Vorlesung und schreiben

$$\begin{aligned} x &= u_1 - v_1 \\ y &= u_2 - v_2 \end{aligned}$$

mit

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \geq 0$$

Die Zielfunktion wird dann

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x + 2y \\ &= u_1 - v_1 + 2u_2 - 2v_2 \\ &= (1, 2, -1, -2) \cdot (u_1, u_2, v_1, v_2) \\ &=: \tilde{c} \cdot \tilde{x} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{x} &:= (u_1, u_2, v_1, v_2) \\ \tilde{c} &= (1, 2, -1, -2) \end{aligned}$$

und die Nebenbedingungen aus Teil (b) transformieren sich zu

$$\begin{aligned} u_1 - v_1 + u_2 - v_2 &\leq 1 \\ -u_1 + v_1 + u_2 - v_2 &\leq 1 \\ u_1 - v_1 - u_2 + v_2 &\leq 1 \\ -u_1 + v_1 - u_2 + v_2 &\leq 1 \\ u_1, u_2, v_1, v_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 - v_1 - v_2 &\leq 1 \\ -u_1 + u_2 + v_1 - v_2 &\leq 1 \\ u_1 - u_2 - v_1 + v_2 &\leq 1 \\ -u_1 - u_2 + v_1 + v_2 &\leq 1 \\ u_1, u_2, v_1, v_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &\leq \tilde{b} \\ \tilde{x} &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

mit den Definitionen

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$