Lösungen 1. Übungsblatt
Lineare Optimierung

1.Aufgabe: Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir:

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & -3 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 7 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

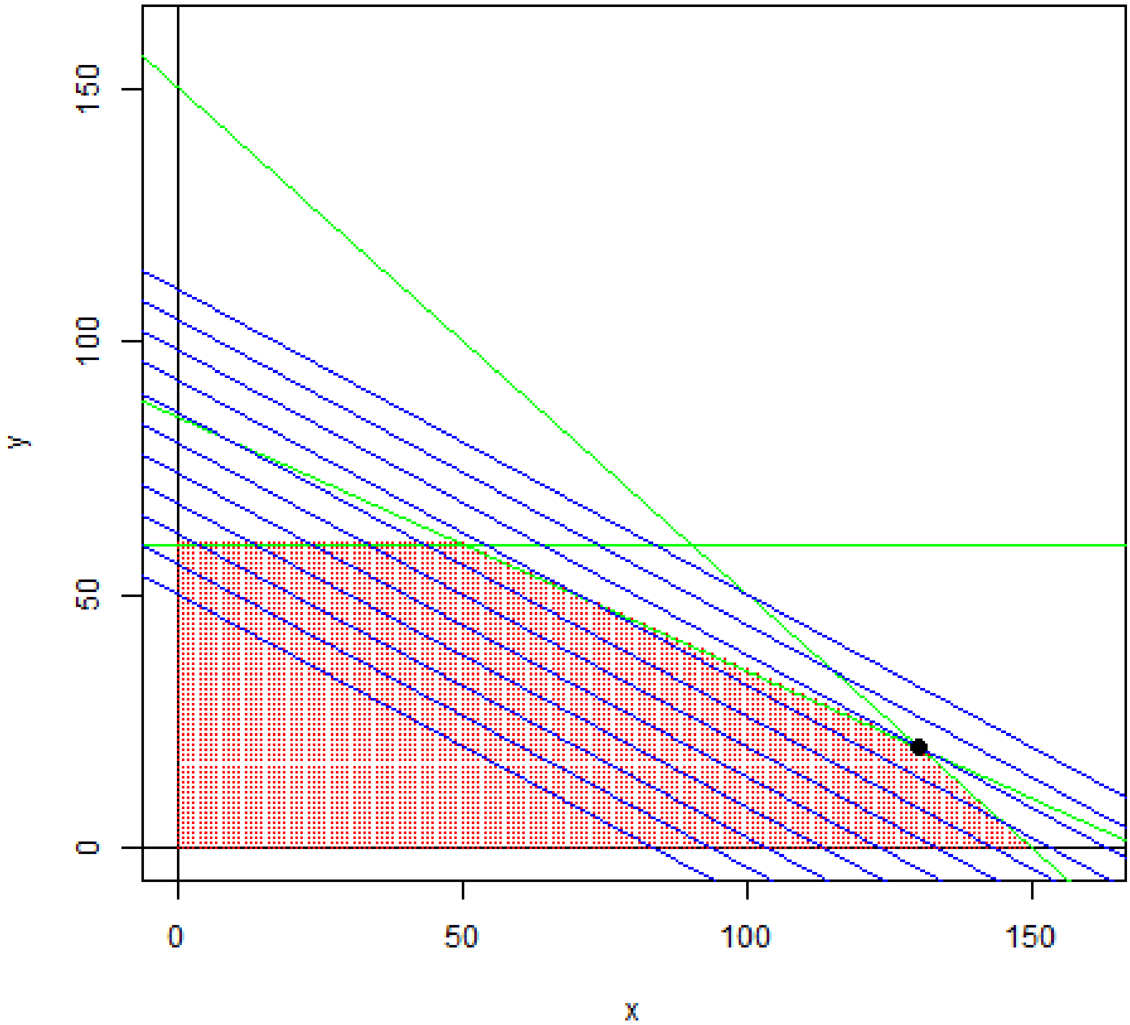
$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 7 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 17 & 3 & 2 & -4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -2 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

also

$$A^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 15 & 0 & 1 & -3 \\ 17 & 3 & 2 & -4 \\ -8 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.Aufgabe: Man bekommt folgendes Bild:



Das Maximum liegt bei $(x_{\max}, y_{\max}) = (130, 20)$ und beträgt $300 \times 130 + 500 \times 20 = 49000$.

3.Aufgabe: **a)** Wir können die Funktion nach μ ableiten und gleich 0 setzen:

$$
\begin{aligned}
f'(\mu) &= 2\sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}(\mu - x_i) &= n\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\
\Rightarrow \qquad \mu &= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i =: \bar{x}
\end{aligned}
$$

also μ ist gleich dem Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ der $x_1, ..., x_n$. Das Minimum ist gegeben durch (nach dieser Umformung war in der Aufgabe aber nicht gefragt)

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 + \frac{n}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) \end{aligned}$$

b) Wir haben folgende Äquivalenzen: **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** $\Leftrightarrow$ **(iii)** $\Leftrightarrow$ **(iv)** $\Leftrightarrow$ **(v)** mit:

(i) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i| \overset{!}{\to} \min$$

(ii) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &\overset{!}{\to} \min \\ |\mu - x_i| &= \lambda_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(iii) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &\overset{!}{\to} \min \\ |\mu - x_i| &\leq \lambda_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(iv) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &\overset{!}{\to} \min \\ \mu - x_i &\leq \lambda_i \\ -(\mu - x_i) &\leq \lambda_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(v) Finde $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &\overset{!}{\to} \min \\ -\lambda_i + \mu &\leq x_i \\ -\lambda_i - \mu &\leq -x_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned}$$

und das ist ein lineares Optimierungsproblem.

c) Für $x \neq 0$ ist die Betragsfunktion $h(x) := |x|$ differenzierbar und es ist

$$h'(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad =: \quad \mathrm{sign}(x)$$

Damit bekommen wir:

$$g'(\mu) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(\mu - x_i) \ \stackrel{!}{=} \ 0 \tag{1}$$

Da der Wert der Funktion g nicht von der speziellen Reihenfolge der $x_1, ..., x_n$ abhängt, können wir annehmen, dass die x_i der Grösse nach angeordnet sind, also

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

Da nach Voraussetzung n ungerade ist, können wir schreiben $n = 2m - 1$ und wir haben

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \cdots < x_{2m-2} < x_{2m-1}$$

Genau $m - 1$ der x_i sind kleiner als x_m und genau $m - 1$ der x_i sind grösser als das x_m. Deswegen heisst das x_m der **Median** der x_i. Diese Zahl muss offensichtlich nicht mit dem Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ übereinstimmen. Dieser Median löst nun die Gleichung (1), denn für $\mu = x_m$ sind genau $m-1$ der Klammern $(\mu - x_i)$ negativ, also $\mathrm{sign}(\mu - x_i) = -1$, und genau $m - 1$ der Klammern $(\mu - x_i)$ sind positiv, also $\mathrm{sign}(\mu - x_i) = +1$. Da g ja bei $\mu = x_m$ nicht differenzierbar ist, kann man nun noch durch direkte Betrachtung von g auf dem Intervall (x_{m-1}, x_{m+1}) verifizieren, dass das Minimum tatsächlich bei $\mu = x_m$ liegt. Die Lösung des Problems aus (b) ist also gegeben durch

$$\mu \quad = \quad \mathrm{median}(x_1, ..., x_n) \quad = \quad x_m \ .$$