Lösungen 9. Übungsblatt Lineare Optimierung

1.Aufgabe: In `Lösung1.pdf` haben wir das gegebene Optimierungsproblem wie folgt in ein lineares Optimierungsproblem umgeschrieben: Wir haben folgende Äquivalenzen: **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** $\Leftrightarrow$ **(iii)** $\Leftrightarrow$ **(iv)** $\Leftrightarrow$ **(v)** mit:

(i) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| \stackrel{!}{\to} \min$$

(ii) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &\stackrel{!}{\to} \min \\ |\mu - x_i| &= \lambda_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(iii) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &\stackrel{!}{\to} \min \\ |\mu - x_i| &\leq \lambda_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(iv) Finde $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &\stackrel{!}{\to} \min \\ \mu - x_i &\leq \lambda_i \\ -(\mu - x_i) &\leq \lambda_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(v) Finde $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &\stackrel{!}{\to} \min \\ -\lambda_i + \mu &\leq x_i \\ -\lambda_i - \mu &\leq -x_i \qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned}$$

und das ist ein lineares Optimierungsproblem. Das Problem **(v)** hat noch nicht die Standard-

Ungleichungsform, da das μ sowohl positiv als auch negativ sein kann. Also machen wir den üblichen Trick und schreiben

$$\mu \;=\; \mu_1 - \mu_2$$

mit $\mu_1, \mu_2 \;\geq\; 0$. Damit erhalten wir schliesslich folgendes LOP **(vi)** in Standard-Ungleichungsform:

(vi) Finde $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &\overset{!}{\to} \min \\ -\lambda_i + \mu_1 - \mu_2 &\leq x_i \\ -\lambda_i - \mu_1 + \mu_2 &\leq -x_i \qquad\qquad \text{fuer } i = 1, ..., n \\ \lambda_i, \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

oder in Matrix-Form:

Sei

$$\vec{y} \;:=\; (\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^{n+2}$$

und

$$\vec{c} \;:=\; (1, 1, \cdots, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$$

Dann:

$$F(\vec{y}) \;=\; \vec{c} \cdot \vec{y} \overset{!}{\to} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$A\vec{y} \;\leq\; \vec{b}, \qquad \vec{y} \;\geq\; \vec{0}$$

mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ -Id_{n\times n} & \vdots & \vdots \\ & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \\ -Id_{n\times n} & \vdots & \vdots \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times(n+2)}, \qquad \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} | \\ \vec{x} \\ | \\ \vdots \\ -\vec{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Definieren wir den Vektor $\vec{e}$ mit lauter Einsen,

$$\vec{e} \;:=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^n$$

bekommen wir also das LOP

$$A\vec{y} \ \leq \ \vec{b}\,, \qquad \vec{y} \geq \vec{0}$$

mit

$$A \ = \ \begin{pmatrix} -Id_{n\times n} & \vec{e} & -\vec{e} \\ -Id_{n\times n} & -\vec{e} & \vec{e} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times(n+2)}\,, \qquad \vec{b} \ = \ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}\,. \tag{1}$$

2.Aufgabe: **a)** Wir haben $2n$ Ungleichungen, wir brauchen also $2n$ Hilfs- oder Schlupf-Variablen

$$\vec{s} \ = \ (s_1, \cdots, s_n, s_{n+1}, \cdots, s_{2n}) \ =: \ (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \ \in \ \mathbb{R}^{2n}$$

und können dann schreiben: Das LOP (1)

$$A\vec{y} \ \leq \ \vec{b}, \qquad \vec{y} \geq \vec{0}$$

aus Aufgabe 1 ist äquivalent zu:

$$\tilde{A}\tilde{y} \ = \ \tilde{b}\,, \qquad \tilde{y} \geq \vec{0}$$

mit

$$\tilde{y} \ := \ (\vec{y}, \vec{s}) \ = \ (\vec{y}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \ \in \ \mathbb{R}^{3n+2}$$

und

$$\tilde{A} \ = \ \begin{pmatrix} -Id_{n\times n} & \vec{e} & -\vec{e} & Id_{n\times n} & 0 \\ -Id_{n\times n} & -\vec{e} & \vec{e} & 0 & Id_{n\times n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times(3n+2)}\,, \quad \vec{b} \ = \ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

b) Um eine Ecke $\tilde{y}$ zu bekommen, muss ja $\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{b}$ erfüllt sein und nach Satz 4.13 müssen die Spaltenvektoren $\tilde{a}_j$ für die $\tilde{y}_j > 0$ ist, linear unabhängig sein. Das bekommt man immer sehr einfach hin, wenn man die $\vec{s}$-Variablen gleich der rechten Seite setzt und alle anderen Variablen gleich Null. Da ja aber noch $\tilde{y} \geq \vec{0}$ gelten muss, geht das nur dann, wenn die rechte Seite $\tilde{b} = \vec{b}$ nur positive Koordinaten hat, und das ist hier offensichtlich nicht erfüllt: Entweder die x_i oder die $-x_i$ in

$$\vec{b} \ = \ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

sind negativ.

c) Nehmen wir also an, dass

$$\vec{x} \ > \ \vec{0}$$

gilt. Das Gauss-Tableau für das Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{b}$ ist

$$\begin{array}{ccccc|c} -Id_{n\times n} & \vec{e} & -\vec{e} & Id_{n\times n} & 0 & \vec{x} \\ -Id_{n\times n} & -\vec{e} & \vec{e} & 0 & Id_{n\times n} & -\vec{x} \end{array}$$

Wir machen die rechte Seite positiv:

$$\begin{array}{ccccc|c} -Id_{n\times n} & \vec{e} & -\vec{e} & Id_{n\times n} & 0 & \vec{x} \\ -2Id_{n\times n} & \vec{0} & \vec{0} & Id_{n\times n} & Id_{n\times n} & \vec{0} \end{array}$$

Mit

$$\tilde{y} \;=\; (\vec{\lambda}, \mu_1, \mu_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2)$$

erhalten wir aus den letzten n Gleichungen

$$\vec{\lambda} \;=\; \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{2}\,.$$

Wählen wir dann etwa $\mu_1 = \mu_2 = 0$, dann liefern die ersten n Gleichungen

$$-\vec{\lambda} + \vec{s}_1 \;=\; \frac{\vec{s}_1 - \vec{s}_2}{2} \;\stackrel{!}{=}\; \vec{x}$$

was durch

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= 2\vec{x} \\ \vec{s}_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$

gelöst werden kann. Also bekommen wir

$$\tilde{y} \;=\; (\vec{x}, 0, 0, 2\vec{x}, \vec{0}) \;\in\; \mathbb{R}^{3n+2}$$

und mit

$$B \;:=\; \left\{ j \in \{1, 2, ..., 3n+2\} \;\middle|\; \tilde{y}_j > 0 \right\}$$

haben wir

$$\tilde{A}_B \;=\; \begin{pmatrix} -Id_{n\times n} & Id_{n\times n} \\ -Id_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}\,,$$

die Spaltenvektoren davon sind alle linear unabhängig, also ist $\tilde{y} = (\vec{x}, 0, 0, 2\vec{x}, \vec{0})$ eine Ecke.