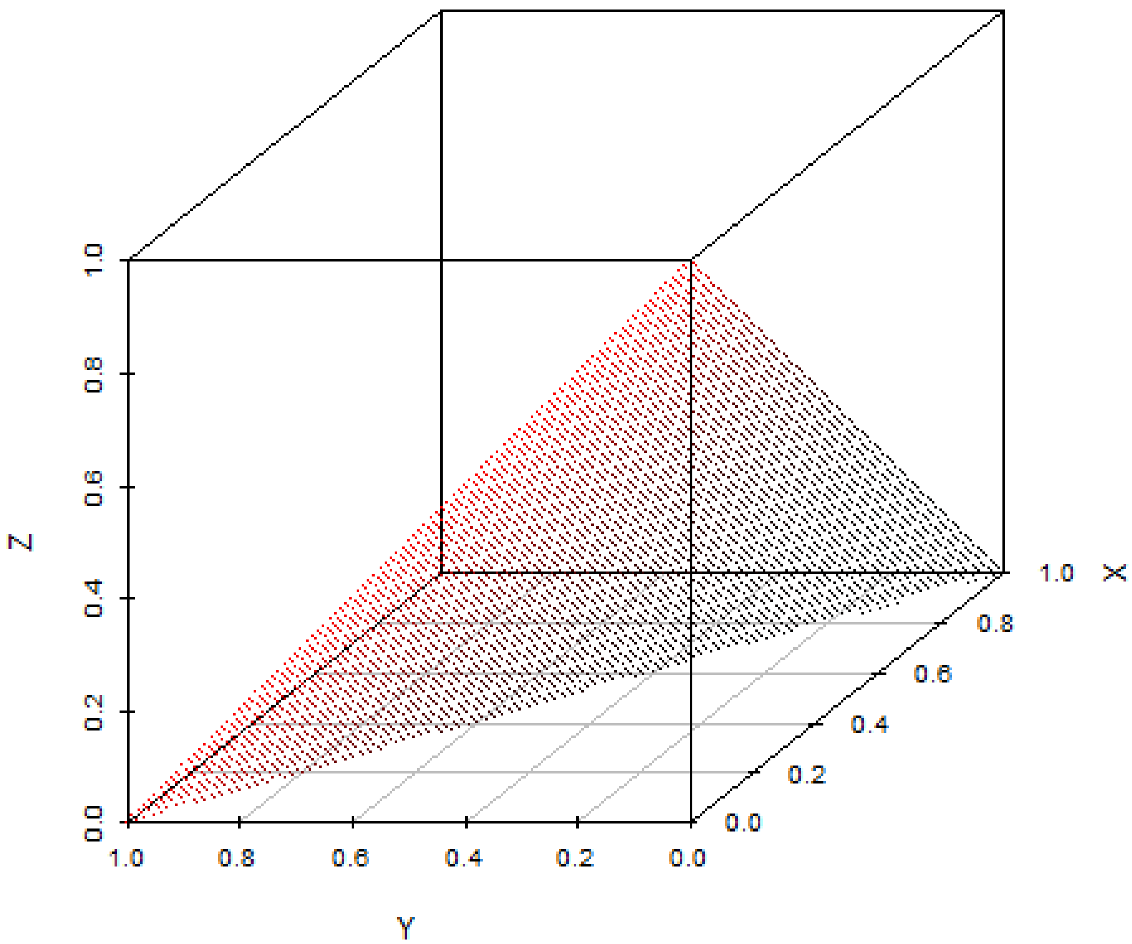
Lösungen 7. Übungsblatt Lineare Optimierung

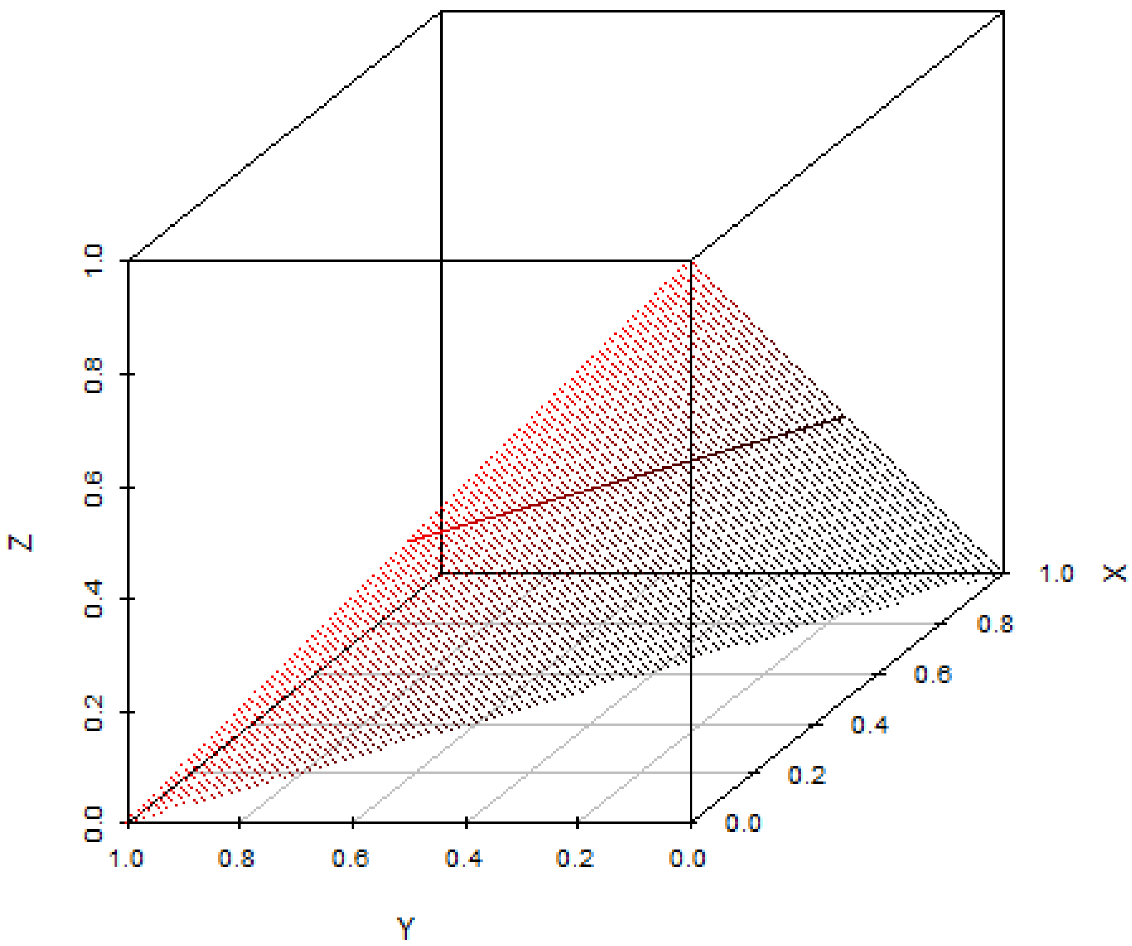
2.Aufgabe: Gegeben waren die Polyeder

$$P_1 := \{\, \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1,\ \vec{x} \geq \vec{0} \,\} ,$$
$$P_2 := \{\, \vec{x} \in P_1 \,|\, z = 0.5 \,\} .$$

a) Für P_1 erhält man folgendes Bild,



und P_2 ist die Strecke in P_1, die die Punkte $(1/2, 0, 1/2)$ und $(0, 1/2, 1/2)$ verbindet:



b) Offensichtlich ist

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \{\, \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1,\ \vec{x} \geq \vec{0} \,\} \\
&= \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\,1\;1\;1\,) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \ \wedge\ \vec{x} \geq \vec{0} \right\},
\end{aligned}
$$

also $A_1 = (\,1\;1\;1\,) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $\vec{b}_1 = 1 \in \mathbb{R}^1$. Und für P_2 können wir schreiben

$$
P_2 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \ \wedge\ \vec{x} \geq \vec{0} \right\},
$$

also $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

c) Nach Satz 4.13 ist ein $\vec{x} \in P_=(A, \vec{b})$ genau dann eine Ecke von $P_=(A, \vec{b})$, wenn für

$$B \quad := \quad \big\{ j \in \{1, 2, ..., n\} \mid x_j > 0 \;\big\}$$

die Spaltenvektoren von A_B linear unabhängig sind.

Für P_1: "$\Rightarrow$": Die Ecken von P_1 sind (durch Betrachten des Bildes)

$$E_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \quad E_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \quad E_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also haben wir $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$ und $B_3 = \{3\}$, und die Spaltenvektoren von A_B bestehen jeweils nur aus der Zahl 1, also jeweils nur ein Vektor und ein Vektor alleine ist immer linear unabhängig (wenn er nicht der Nullvektor ist).

"$\Leftarrow$": Sollen die Spaltenvektoren von A_B linear unabhängig sein, darf das offensichtlich nur ein einziger sein, also nur eine Koordinate von $\vec{x} = (x, y, z)$ darf ungleich 0 sein. Wegen $x + y + z = 1$ muss diese Koordinate dann notwendig den Wert 1 haben, also bekommt man genau die Ecken E_1, E_2 und E_3.

Für P_2: "$\Rightarrow$": Die Ecken von P_2 sind (durch Betrachten des Bildes)

$$E_4 \;=\; \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \;, \quad E_5 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

also haben wir $B_4 = \{1, 3\}$ und $B_5 = \{2, 3\}$ und die Matrizen A_B sind gegeben durch

$$A_{B_4} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; A_{B_5} \;,$$

haben also linear unabhängige Spaltenvektoren.

"$\Leftarrow$": Sollen die Spaltenvektoren von A_B linear unabhängig sein, kommt $|B| = 1$ und $|B| = 2$ in Frage. Für $|B| = 1$, also nur eine Koordinate von $\vec{x} = (x, y, z)$ darf ungleich 0 sein, ist die Gleichung $A_B \vec{x}_B = \vec{b}$ nicht lösbar. Für $|B| = 2$ kommen nur die Teilmengen $B_4 = \{1, 3\}$ und $B_5 = \{2, 3\}$ in Frage, da die ersten beiden Spaltenvektoren von A identisch, also linear abhängig sind. Da die Gleichung $A_B \vec{x}_B = \vec{b}$ erfüllt sein muss, erhält man die beiden Ecken E_4 und E_5.