Lösungen 13. Übungsblatt Lineare Optimierung

1.Aufgabe: **a)** Es gilt: Haben wir ein 'primales' LOP (P) gegeben durch

$$\text{(P)} \qquad \vec{c}\cdot\vec{x} \overset{!}{\to} \max \quad \text{unter} \quad A\vec{x} \le \vec{b}, \quad \vec{x} \ge \vec{0}$$

dann lautet das duale LOP (D):

$$\text{(D)} \qquad \vec{b}\cdot\vec{\lambda} \overset{!}{\to} \min \quad \text{unter} \quad A^T\vec{\lambda} \ge \vec{c}, \quad \vec{\lambda} \ge \vec{0}$$

In unserem Fall ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 170 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

so dass das duale LOP (D) also gegeben ist durch

$$170\lambda_1 + 150\lambda_2 + 180\lambda_3 \overset{!}{\to} \min$$

unter den Nebenbedingungen $\vec{\lambda} \ge \vec{0}$ und

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\ge 300 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &\ge 500 \end{aligned}$$

b) Die duale Zielfunktion ist also gegeben durch

$$\text{FD}(\vec{\lambda}) = 170\lambda_1 + 150\lambda_2 + 180\lambda_3$$

und wegen

$$\begin{aligned} && \lambda_1 + \lambda_2 &\ge 300 \\ \Leftrightarrow \qquad & \exists s_1 \ge 0 \text{ mit} & \lambda_1 + \lambda_2 - s_1 &= 300 \end{aligned}$$

können wir die Nebenbedingungen auch schreiben als $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s_1, s_2) \ge \vec{0}$ und

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - s_1 &= 300 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - s_2 &= 500 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also das Start-Tableau

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
1	1	0	−1	0	300
2	1	3	0	−1	500
170	150	180	0	0	FD

c) Mit $B_0 := \{2, 3\}$ als Start-Basis erhalten wir die folgende Sequenz von Simplex-Tableaus:

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
1	1	0	-1	0	300
1	0	3	1	-1	200
170	150	180	0	0	FD

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
1	1	0	-1	0	300
1	0	3	1	-1	200
20	0	180	150	0	FD $-$ 45000

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
1	1	0	-1	0	300
1	0	3	1	-1	200
-40	0	0	90	60	FD $-$ 57000

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
1	1	0	-1	0	300
1/3	0	1	1/3	$-1/3$	200/3
-40	0	0	90	60	FD $-$ 57000

Jetzt ist $\vec{c}_B = (0, 0)$ und A_B (eine Permutation der) Einheitsmatrix, wir können also die nächste Simplex-Iteration machen. Da wir FD minimieren wollen, gehen wir in die Richtung mit dem negativsten c_i in der letzten Zeile. Also $i = 1$ ist entering index und

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2		
1	1	0	-1	0	300	300
1/3	0	1	1/3	$-1/3$	200/3	200
-40	0	0	90	60	FD $-$ 57000	

$j = 3$ ist leaving index (wir müssen die 200 und damit die zweite Zeile nehmen und die 1 aus A_B steht da in der 3. Spalte, also $j = 3$). Damit haben wir eine neue Basis

$$B_1 = \{1, 2\}$$

und erhalten:

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
1	1	0	-1	0	300
1	0	3	1	-1	200
-40	0	0	90	60	FD $-$ 57000

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
0	1	-3	-2	1	100
1	0	3	1	-1	200
-40	0	0	90	60	FD $-$ 57000

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	
0	1	-3	-2	1	100
1	0	3	1	-1	200
0	0	120	130	20	$\mathrm{FD} - 49000$

Alle Koeffizienten in der letzten Zeile sind positiv, also haben wir das Minimum erreicht mit

$$\vec{\lambda}_{\text{opt}} \; = \; (200, 100, 0)$$

und

$$\mathrm{FD}(\vec{\lambda}_{\text{opt}}) \; = \; 170 \times 200 \; + \; 150 \times 100 \; + \; 180 \times 0 \; = \; 49000$$

In dem End-Tableau des dualen Problems können wir ebenfalls die Optimallösung $\vec{x}_{\text{opt}}$ des primalen Problems ablesen, und zwar in der letzten Zeile bei den $\vec{s}$-Variablen. Also:

$$\vec{x}_{\text{opt}} \; = \; (130, 20) \; .$$

2.Aufgabe: a) Das primale LOP mit

$$\begin{aligned} \vec{y} \; &:= \; (\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2) \; \in \; \mathbb{R}^{n+2} \\ \vec{c} \; &:= \; (1, 1, \cdots, 1, 0, 0) \; =: \; (\vec{e}, 0, 0) \; \in \; \mathbb{R}^{n+2} \end{aligned}$$

mit $\vec{e} := (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$ und:

$$F(\vec{y}) \; = \; \vec{c} \cdot \vec{y} \overset{!}{\to} \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$A\vec{y} \; \leq \; \vec{b} \, , \qquad \vec{y} \; \geq \; \vec{0}$$

mit

$$A \; = \; \begin{pmatrix} -Id_{n \times n} & \vec{e} & -\vec{e} \\ -Id_{n \times n} & -\vec{e} & \vec{e} \end{pmatrix} \; \in \; \mathbb{R}^{2n \times (n+2)} \; , \qquad \vec{b} \; = \; \begin{pmatrix} \vec{x} \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \; \in \; \mathbb{R}^{2n}$$

können wir auch schreiben in der Form

$$\tilde{c} \cdot \vec{y} \; := \; (-\vec{c}) \cdot \vec{y} \overset{!}{\to} \max$$

mit

$$\tilde{c} \; := \; -\vec{c} \; = \; (-\vec{e}, 0, 0) \; .$$

Da wir den Buchstaben λ in diesem Fall schon für die primalen Variablen benutzt haben, brauchen wir einen neuen Buchstaben für die dualen Variablen, die aus dem $\mathbb{R}^{2n}$ sein müssen. Nehmen wir etwa den Buchstaben

$$\vec{\xi} \; = \; (\vec{u}, \vec{v}) \; \in \; \mathbb{R}^{2n} \; .$$

Damit lautet das duale LOP

$$\mathrm{FD}(\vec{\xi}) \;=\; \mathrm{FD}(\vec{u},\vec{v}) \;=\; \vec{b}\cdot\vec{\xi} \;=\; \begin{pmatrix}\vec{x}\\ -\vec{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} \;=\; \vec{x}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \stackrel{!}{\to} \min$$

unter den Nebenbedingungen $\vec{\xi} \;=\; (\vec{u},\vec{v}) \;\geq\; \vec{0}$ und

$$A^T\vec{\xi} \;\geq\; \tilde{c} \;=\; -\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -A^T\vec{\xi} \;\leq\; \vec{c}$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$-\begin{pmatrix} -Id_{n\times n} & -Id_{n\times n}\\ \vec{e} & -\vec{e}\\ -\vec{e} & \vec{e}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} \;\leq\; \begin{pmatrix}\vec{e}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} \vec{u} \;+\; \vec{v} \;&\leq\; \vec{e}\\ -\vec{e}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \;&\leq\; 0\\ \vec{e}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \;&\leq\; 0 \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$u_i + v_i \;\leq\; 1 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

und $\vec{e}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 0$ oder

$$\textstyle\sum_{i=1}^n u_i \;=\; \sum_{i=1}^n v_i \;.$$

c) Nach dem Satz 6.1 aus der Vorlesung gilt (beachten Sie, dass wir in der Formulierung des primalen Problems die Funktion $-g$ maximieren)

$$-g(\mu_{\text{opt}}) \;\leq\; \mathrm{FD}(\vec{u},\vec{v})$$

für alle zulässigen $(\vec{u},\vec{v})$, d.h. für alle $(\vec{u},\vec{v})$, die die Nebenbedingungen aus Teil (b) erfüllen. Wenn wir also zeigen können, dass

$$\mathrm{FD}\,(\vec{u}_{\text{opt}},\vec{v}_{\text{opt}}) \;=\; -g(\mu_{\text{opt}})$$

gilt, dann lösen $(\vec{u}_{\text{opt}},\vec{v}_{\text{opt}})$ das duale Problem. Nun ist

$$\begin{aligned} g(\mu_{\text{opt}}) \;&=\; \sum_{i=1}^{n}|\mu_{\text{opt}} - x_i|\\ &=\; \sum_{i=1}^{2m-1}|x_m - x_i|\\ &=\; \sum_{i=1}^{m-1}(x_m - x_i) \;+\; \sum_{i=m+1}^{2m-1}(x_i - x_m)\\ &=\; (m-1)x_m \;-\; \sum_{i=1}^{m-1}x_i \;+\; \sum_{i=m+1}^{2m-1}x_i \;-\; (m-1)x_m\\ &=\; -\left\{\sum_{i=1}^{m-1}x_i \;-\; \sum_{i=m+1}^{2m-1}x_i\right\} \end{aligned}$$

und das negative davon ist offensichtlich identisch mit

$$\begin{aligned} \mathrm{FD}\left(\vec{u}_{\mathrm{opt}}, \vec{v}_{\mathrm{opt}}\right) &= \vec{x} \cdot \vec{u}_{\mathrm{opt}} - \vec{x} \cdot \vec{v}_{\mathrm{opt}} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} x_i - \sum_{i=m+1}^{2m-1} x_i \; . \end{aligned}$$