Lösungen 11. Übungsblatt Lineare Optimierung

1.Aufgabe: a) Phase-I-Methode: Wir betrachten das Hilfs-LOP

$$HF(v_1, v_2) \;=\; HF(x, y, z, v_1, v_2) \;:=\; v_1 + v_2 \stackrel{!}{\to} \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &= \vec{b} \\ \tilde{x} = (x, y, z, v_1, v_2) &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{A} \;=\; (A, Id) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Das Hilfs-LOP wird dann mit dem Standard-Simplex-Algorithmus gelöst. Es ist gerade so gemacht, dass man immer die rechte Seite (mit Rest Nullen) als Start-Ecke nehmen kann (wobei man darauf achten muss, die rechte Seite vor dem upsetten des Hilfs-LOP positiv zu machen, durch Multiplikation der relevanten Zeilen der Nebenbedingungen mit -1, das ist hier aber nicht nötig). Als Start-Ecke können wir also wählen

$$\tilde{x}_0 \;=\; (0, 0, 0, 4, 8), \qquad B = B_0 = \{4, 5\}, \quad N = N_0 = \{1, 2, 3\}$$

Wir erhalten dann die folgende Sequenz von Simplex-Tableaus:

1	1	1	1	0	4
1	3	4	0	1	8
0	0	0	1	1	HF

Wir brauchen $A_B = Id$ (oder Permutation davon), das ist erfüllt, und $\vec{c}_B = (0, 0)$, das ist noch nicht erfüllt. Also Gauss:

1	1	1	1	0	4
1	3	4	0	1	8
-2	-4	-5	0	0	HF-12

Da wir HF minimieren wollen, müssen wir in die Richtung mit den negativsten Koeffizienten (in der letzten Zeile) gehen, also: $i = 3$ ist entering index. Damit:

						λ
1	1	1	1	0	4	4
1	3	4	0	1	8	2
-2	-4	-5	0	0	HF-12	

und wir erhalten $j = 5$ als leaving index. Also $B_1 = \{3, 4\}$, $N_1 = \{1, 2, 5\}$ und wir machen weiter mit Gauss um wieder $A_{B_1} = Id$ und $\vec{c}_{B_1} = (0, 0)$ zu bekommen:

3/4	1/4	0	1	-1/4	2
1/4	3/4	1	0	1/4	2
-3/4	-1/4	0	0	5/4	HF-2

Wir müssen in die negativste Richtung gehen, also $i = 1$ ist entering index. Damit

						λ
3/4	1/4	0	1	-1/4	2	8/3
1/4	3/4	1	0	1/4	2	8
-3/4	-1/4	0	0	5/4	HF-2	

und wir erhalten $j = 4$ als leaving index, also $B_2 = \{1, 3\}$ und $N_2 = \{2, 4, 5\}$. Gauss:

1	1/3	0	4/3	-1/3	8/3
0	2/3	1	-1/3	1/3	4/3
0	0	0	1	1	HF-0

Die Koeffizienten in der letzten Zeile sind alle positiv, also haben wir ein Minimum erreicht:

$$\tilde{x}_{\text{opt}} \;=\; (8/3, 0, 4/3, 0, 0) \;=\; (x, y, z, v_1, v_2) \;=\; (\vec{x}, v_1, v_2)$$

und damit ist (kann man nur machen, wenn die v_i gleich 0 sind oder äquivalent HF=0, aber das ist hier ja erfüllt)

$$\vec{x}_0 \;=\; (8/3, 0, 4/3)$$

eine Start-Ecke für das eigentliche Problem.

b) Wir können mit dem End-Tableau aus Teil (a) weiter machen: $\vec{x}_0 = (8/3, 0, 4/3)$ ist Start-Ecke, $B_0 = \{1, 3\}$, $N_0 = \{2\}$ und damit

1	1/3	0	8/3
0	2/3	1	4/3
1	1	0	F

Wir müssen $\vec{c}_B = (0, 0)$ machen:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ \hline 0 & 2/3 & 0 & \text{F-8/3} \end{array}$$

Jetzt tun wir maximieren, gehen also in die Richtung mit dem positivsten Koeffizienten in der letzten Zeile: $i = 2$ ist entering index,

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & & \lambda \\ 1 & 1/3 & 0 & 8/3 & 8 \\ 0 & 2/3 & 1 & 4/3 & 2 \\ \hline 0 & 2/3 & 0 & \text{F-8/3} & \end{array}$$

und $j = 3$ ist leaving index, $B_1 = \{1, 2\}$, $N_1 = \{3\}$. Damit

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \text{-1/2} & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \text{-1} & \text{F-4} \end{array}$$

und wir erhalten $\vec{x}_{\text{opt}} = (2, 2, 0)$ mit $F(\vec{x}_{\text{opt}}) = 2 + 2 = 4$ als Lösung.

c) Damit wir die `solveLP()`-Funktion aus dem linprog-package benutzen können, müssen wir das Problem auf die Standard-Ungleichungsform bringen. Dazu schreiben wir

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ A\vec{x} &\geq \vec{b} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ -A\vec{x} &\leq -\vec{b} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tilde{A}\vec{x} \leq \tilde{b}$$

mit

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} := \begin{pmatrix} \vec{b} \\ -\vec{b} \end{pmatrix}$$

Also lautet die Standard-Ungleichungsform:

$$F(\vec{x}) \quad = \quad \vec{c} \cdot \vec{x} \; \rightarrow \; \max$$

mit $\vec{c} = (1,1,0)$ unter $\vec{x} = (x,y,x) \geq (0,0,0)$ und

$$\tilde{A}\vec{x} \quad \leq \quad \tilde{b} \, .$$

mit $\tilde{A}, \tilde{b}$ wie oben angegeben.

2.Aufgabe: **a)** Start-Ecke für das Hilfs-LOP ist

$$\tilde{x}_0 \quad = \quad (0,0,0,2,2)$$

mit $B_0 = \{4,5\}$ und $N_0 = \{1,2,3\}$. Also bekommen wir folgende Sequenz von Simplex-Tableaus:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{HF} \end{array}$$

Wir brauchen $A_B = Id$, oder Permutation davon, das ist erfüllt, und $\vec{c}_B = (0,0)$, das ist noch nicht erfüllt. Also Gauss:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \text{HF-2} \end{array}$$

Da wir HF minimieren wollen, müssen wir in die Richtung mit den negativsten Koeffizienten (in der letzten Zeile) gehen, also: $i = 2$ ist entering index. Damit:

$$\begin{array}{rrrrr|rc} & & & & & & \lambda \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ \cline{1-6} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \text{HF-2} & \end{array}$$

und $j = 5$ ist leaving index. Also $B_1 = \{2,4\}$, $N_1 = \{1,3,5\}$, Gauss:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{HF-0} \end{array}$$

also

$$\tilde{x}_{\text{opt}} \;=\; (0,1,0,1,0) \;=\; (\vec{x}, v_1)$$

und damit ist

$$\vec{x}_0 \;=\; (0,1,0,1)$$

eine Start-Ecke für das eigentliche LOP. In der Vorlesung, wo wir 2 Hilfsvariablen v_1 und v_2 benutzt hatten, waren wir auf die Start-Ecke $\vec{x}_0 = (2/3, 4/3, 0, 0)$ gekommen.

b) Wir machen also mit dem End-Tableau aus Teil (a) weiter: $\vec{x}_0 = (0,1,0,1)$ ist Start-Ecke, $B_0 = \{2,4\}$, $N_0 = \{1,3\}$ und damit

$$\begin{array}{rrrr|r} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & F \end{array}$$

Wir müssen $\vec{c}_B = (0,0)$ machen:

$$\begin{array}{rrrr|r} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ \hline -1/2 & 0 & 3/2 & 0 & F-3 \end{array}$$

Jetzt tun wir maximieren, gehen also in die Richtung mit dem positivsten Koeffizienten in der letzten Zeile: $i = 3$ ist entering index,

$$\begin{array}{rrrr|rc} & & & & & \lambda \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & +\infty \\ 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline -1/2 & 0 & 3/2 & 0 & F-3 & \end{array}$$

und $j = 4$ ist leaving index, $B_2 = \{2,3\}$, $N_2 = \{1,4\}$. Gauss:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -5 & 0 & 0 & -3 & F-6 \end{array}$$

Also Maximum bei $\vec{x}_{\text{opt}} = (0,2,2,0) = (x, y, s_1, s_2)$ mit Wert $F(x_{\text{opt}}, y_{\text{opt}}) = F(0,2) = 6$. Dasselbe Maximum hatten wir auch in der Vorlesung erhalten.